

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ГЕОТЕРМИИ  
ДАГЕСТАНСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН (ИПГ ДНЦ РАН)

УДК 536.712, 536.752

№ госрегистрации 01201360106

Инв №

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИПГ ДНЦ РАН

\_\_\_\_\_ А.Б. Алхасов

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

в рамках государственного задания: «Фундаментальные научные исследования в соответствии с Программой фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы»;

направление 18: «Физико-технические и экологические проблемы энергетики; теплообмен; теплофизические и электрофизические свойства веществ; низкотемпературная плазма и технологии на ее основе»

по теме:

«Статистические и термодинамические методы моделирования процессов в геотермальных энергетических системах»  
(промежуточный за 2017 г.)

Руководитель темы

\_\_\_\_\_

А.А. Аливердиев

подпись, дата

Махачкала 2017

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

И.о. зав. лабораторией  
доктор физ.-мат. наук,

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

А.А.Аливердиев (введение,  
заключение, разделы 4-9)

Исполнители темы:  
Старший научный сотрудник

\_\_\_\_\_

В.Д. Бейбалаев (разделы 6-9)

Исполнители темы:

Научный сотрудник

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Р.А. Магомедов (разделы 1-7  
приложение)

Младший научный сотрудник

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Э.Н. Ахмедов (разделы 5-9)

Младший научный сотрудник

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Р.Р. Мейланов (разделы 5-9)

## Реферат

Отчет 59 с., 14 табл., 3 рис., 76 источников, 1 прил.

### ТЕРМОДИНАМИКА, ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ, ТЕПЛОПЕРЕНОС, НЕЛОКАЛЬНОСТЬ

Объектом исследования является математическое описание равновесных и неравновесных процессов и явлений с использованием аппарата дробного дифференцирование, в том числе применительно к прикладным задачам геотермии и расчетам уравнений состояния технически важных соединений.

Цель работы — обобщение равновесной и неравновесной термодинамики на основе математического аппарата интегрирования и дифференцирования дробного порядка (дробное исчисление).

В ходе выполнения проекта получен ряд новых оригинальных результатов, в частности:

1. Дано обобщение равновесной и неравновесной термодинамики на основе дробного исчисления.

2. Используя обобщения термодинамики в формализме производных дробного порядка, в широком диапазоне температур и давлений рассчитаны теплофизические свойства инертных газов (неона и аргона), воды (включая линию насыщения) и фреона (ранее) R409В.

3. На основе экспериментальных измерений, проведенных стационарным методом, получены данные о влиянии температуры и гидростатического давления на теплопроводность образцов песчаника и керамики.

4. Исследована задача Стефана в обобщении для фрактальных сред с применением аппарата производных дробного порядка в смысле Капуто по времени. Построена разностная схема. Разработан алгоритм и создана программа численного решения с оператором дробного дифференцирования. Оценены функциональные зависимости движения межфазной границы для обобщенного условия Стефана от значения показателя производной дробного порядка (ППДП).

5. Исследована задача неизотермической фильтрации с учетом нелокальных эффектов по времени и координате для случая гидроразрыва.

По результатам исследований по теме осуществлено 57 научных публикаций (см. [9-65] из приведенного списка), из них 18 статей в рецензируемых журналах, 15

публикаций в изданиях, входящих основные зарубежные реферативные базы данных (Web of Science и Scopus, см. [9-24]).

Основные конструктивные, технологические и технико-эксплуатационные характеристики: (1) получение обобщенной термодинамики с использованием аппарата дробного дифференцирования; (2) расчет уравнений состояний однокомпонентных и многокомпонентных веществ, важных с фундаментальной и прикладной точек зрения; (3) решения задач тепло- и массопереноса, включающие геотермальные задачи фильтрации жидкости в пласте и задачи Стефана о промерзании грунта.

Степень внедрения результатов НИР и их эффективность характеризуется научными публикациями и их цитированием.

Область применения: спектр потенциальных приложений охватывает широкий круг, включающий материаловедение и прикладную инженерию, в том числе задачи энергетики и геотермии.

## ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Дробное исчисление – раздел математического анализа основанный на применении интегралов и производных произвольного порядка. В случае, когда показатель производных и интегралов дробного порядка равен целому числу получается результаты традиционного математического анализа.

Уравнение состояния – функциональное уравнение, связывающее термодинамические параметры (давление, температура, объем, химический потенциал) в состоянии термодинамического равновесия. Различают термическое уравнения состояния (связь между термодинамическими параметрами) и калорическое уравнение состояния (связь между термодинамическим потенциалом и термодинамическими параметрами).

Обобщенная термодинамика – термодинамика, построенная на основе математического аппарата – дробного исчисления. Результаты обобщенной термодинамики переходят в результаты традиционной термодинамики, когда показатель производной не равен единице.

«Фрактальное» уравнение состояния – однопараметрическое уравнения состояния, где параметром является показатель производной дробного порядка  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) по термодинамическому параметру. При  $\alpha = 1$  «фрактальное» уравнения состояния переходит в традиционное (классическое) уравнения состояния.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ДИ	дробное исчисление;
ДД	дробное дифференцирование;
УС	уравнение состояния;
ФУС	«фрактальное» уравнение состояния;
ПДП	производная дробного порядка;
ППДП	показатель производной дробного порядка;
ТП	термодинамические параметры;
ТХ	термодинамические характеристики;
ТС	теплофизические свойства;
ОУС	однопараметрическое уравнение состояния.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	8
1 Полный дробный дифференциал от функции двух переменных .....	14
2 Основные соотношения обобщенной термодинамика в дробном исчислении .....	17
3 Фрактальное уравнение состояния для однокомпонентной системы .....	20
4 Расчет теплофизических характеристик аргона и неона на основе фрактального уравнения состояния .....	27
5 Фрактальное уравнение состояния для многокомпонентной системы .....	31
6 Расчет энтропии, теплоемкости, сжимаемости воды .....	35
7 Расчет теплофизических характеристик фреона R409В на основе фрактального уравнения состояния.....	35
8. Неравновесная термодинамика в дробном исчислении. Задача неизотермической фильтрации с учетом нелокальных эффектов.....	37
9. Моделирование процессов промерзания.....	41
Заключение.....	47
Список использованных источников .....	49
Приложение А .....	57

## ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием технологий получения новых материалов, созданием уникальных измерительных приборов, расширением области рабочих параметров веществ при их применения в различных технологических процессах, в том числе при освоении возобновляемым источников энергии появилась необходимость обобщения традиционной термодинамики для вывода новых уравнений состояния и исследования процессов нелокального тепломассопереноса в сложных средах таких как геотермальные коллектора.

В основе традиционной термодинамики лежит гипотеза молекулярного хаоса [1,2] приводящее к принципу локального равновесия. Предполагается упругость актов столкновения частиц, когда нет эффектов памяти и пространственных корреляций. Акты столкновения частиц локальны по времени и координате. Для многих физических систем (например, фрактальных и самоорганизующихся структур) условия выполнения гипотезы молекулярного хаоса не выполняются, что и приводит к необходимости обобщения термодинамики и статистической физики. В действительности акты столкновений частиц имеют более сложную природу, которая связана с тем, что потенциал взаимодействия сталкивающихся частиц зависит от импульсов частиц, что в конечном итоге приводит к нелокальным свойствам вещества, как эффект памяти и пространственных корреляций. Это приводит к невыполнению принципа локального равновесия, лежащий в основе традиционной термодинамики и к необходимости исходить из принципа локального неравновесия и учета нелокальных свойств и к различным обобщениям термодинамики. [3]

Можно отметить два разных направления обобщения термодинамики и статистической физики. В основе одного из направлений лежит использование принципа максимума энтропии. Если исходить из выражения энтропии Больцмана–Гиббса, то принцип максимума энтропии приводит к каноническому экспоненциальному распределению. Для получения класса неканонических степенных распределений исходят из обобщенных выражений для энтропии. Так, если вместо энтропии Больцмана–Гиббса

$S = \sum_i p_i \ln p_i$ , который приводит к экспоненциальному распределению  $p(E) = \exp(-\beta E)$

(где  $\beta = 1/kT$ ), использовать энтропию вида  $S_q = (1 - \sum_i p_i^q)/(q - 1)$  то, получится степенное

распределение  $p_q(E) = [1 + (1 - q)(-\beta E)]^{\frac{q}{1-q}}$ ,  $\ln_q(p_i) = (1 - \sum_i p_i^q)/(1 - q)$ .



При этом обобщенные выражения для энтропии и распределения при  $q=1$  переходят в соответствующие выражения теории Больцмана–Гиббса. Подробное изложение этого метода можно найти в работах [4-7].

Обобщения неравновесной термодинамики связано с развитием концепции фрактала. Особенность систем с фрактальной структурой заключается в наличии развитой межфазной границы, с чем собственно и связана необходимость использования геометрии дробной размерности, имеющей свойства самоподобия [8]. Для веществ с фрактальной структурой не выполняется принцип локального равновесия, лежащий в основе традиционной термодинамики и необходимо исходить из принципа локального неравновесия, приводящий к необходимости учета нелокальных свойств и к различным обобщениям термодинамики [3]. Исследование неравновесных процессов в условиях принципа локального неравновесия приводят к необходимости учета эффектов памяти (нелокальность по времени) и пространственных корреляций (нелокальность по координате).

Учет нелокальных эффектов в рамках традиционных подходов приводит к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, где ядро интегрального оператора несет информацию о природе нелокальности. Для решения таких уравнений интегральные операторы представляются в виде ряда дифференциальных операторов с возрастающими ППДП и при наличии малого параметра, ограничиваются несколькими членами ряда. В отсутствие малого параметра такой подход оказывается непродуктивным и, кроме того, полученные уравнения также не всегда удаются решать. Производные дробного порядка, являясь определенным сочетанием обычных операций дифференцирования и интегрирования, открывают новый подход в теории нелокальных дифференциальных уравнений. За последнее время дробное исчисление (ДИ) применяется во всех направлениях развития естествознания.

Основные результаты, полученные в ходе выполнения проекта, опубликованы в работах [9-65], в том числе в изданиях, входящих основные реферативные базы данных (Web of Science и Scopus, см. [9-24]).

В 2017 году в рамках выполнения темы было опубликовано и представлено к публикации 25 работ, на основании результатов которых составлен настоящий отчет:

**в зарубежной печати:**

1. Magomedov R.A., Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Aliverdiev, A.A. Generalization of Thermodynamics in Fractional Order Derivatives and Calculation of

- Heat-Transfer Properties of Noble Gases // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 2018 (**accepted**) doi: 10.1007/s10973-018-7024-2 (**WoS, impact 2.042**)
2. Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Magomedov R.A., Ragimkhanov G.B., Aliverdiev A.A., To the theory of non-local non-isothermal filtration in porous medium // J. Phys.: Conf. Ser., 2018, **946**, 012076, doi: 10.1088/1742-6596/946/1/012076 (**Scopus, WoS, impact RG 0.45**) (<http://www.ihed.ras.ru/elbrus17/proc/accepted/>)
  3. Emirov S.N., Beybalaev V.D., Gadzhiev G.G., Ramazanov A.E., Amirova A.A., and Aliverdiev A.A., To the description of the temperature and pressure dependences of the thermal conductivity of sandstone and ceramics // 2017, **891**, 012335 doi :10.1088/1742-6596/891/1/012335 (**Scopus, WoS, impact RG 0.45**)
  4. Magomedov R.A., Meilanov R.R., Meilanov R.P., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Aliverdiev A.A., To the fractal equation of state // Journal of Physics: Conference Series, 2017, **891**, 012331 doi:10.1088/1742-6596/891/1/012331 (**Scopus, WoS, impact RG 0.45**)

**в рецензируемых журналах:**

5. Бейбалаев В.Д., Аливердиев А. А., Магомедов Р. А., Мейланов Р. Р., Ахмедов Э. Н. Моделирование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с операторами дробного дифференцирования // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, 2017. Т. 21, № 2. С. 376-387. doi: 10.14498/vsgtu1492 (**список ВАК**)
6. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Гаджиев Г.Г., Амирова А.А., Аливердиев А.А. О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности горных пород // Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого, №5(103) , 2017, 52-66. (**список ВАК**)
7. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. Фрактальное уравнение состояния и расчет теплофизических характеристик аргона // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки, **32**, No. 1, 2017, 6-11, doi: 10.21779/2542-0321-2017-32-1-6-11
8. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. Фрактальное уравнение состояния и расчет теплофизических характеристик воды // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки, **32**. No. 4. 2017, 63-69 doi: 10.21779/2542-0321-2017-32-4-63-69

### **материалы конференций:**

9. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., К расчету термодинамических характеристик на основе фрактального уравнения состояния на примере водяного пара Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Кабардино-Балкарская Республика, Терскол, 17 – 21 мая 2017 г., стр. 136-137.
10. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Расчет теплофизических характеристик воды в дробном исчислении // Материалы V Международной конференции "Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы" 23-26 октября 2017 г., Т.1, стр. 305-307.
11. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э. Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., К расчету термодинамических характеристик воды на основе фрактального уравнения состояния // Материалы XII Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченная к 85-летию профессора М.Г. Алишаева, стр. 155-156.
12. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., К фрактальному уравнению состояния, Материалы Международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетики», Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, 9-11 октября 2017 г., ISBN 978-5-383-01233-8 (Том 2), стр. 316-318.
13. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Гаджиев Г.Г., Амирова А.А., Аливердиев А.А., Температурные и барические закономерности изменения теплопроводности песчаника и керамики // Сборник докладов Седьмой Международной научной конференции “Химическая термодинамика и кинетика” 29 мая –2 июня 2017, Великий Новгород, стр. 364-365.
14. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Давудов И.А., Амирова А.А., Аливердиев А.А., О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности композитных материалов // Материалы XX Междисциплинарный, Международный Симпозиум “Упорядочение в минералах и сплавах”, ОМА-20, 10-15 сентября 2017г., Ростов-на-Дону – п. Южный, с. 276-279.
15. Бейбалаев В.Д., Эмиров С.Н., Аливердиев А.А., Амирова А.А., Гаджиев Г.Г., К описанию температурной и барической зависимости теплопроводности мергеля // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы

- прикладной математики и физики», Кабардино-Балкарская Республика, Терскол, 17 – 21 мая 2017 г., стр. 46-47.
16. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Амирова А.А., Ибрагимов О.И., Аливердиев А.А., Тепловые свойства минерального вещества в термобарических условиях литосферы // Материалы V Международной конференции "Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы" 23-26 октября 2017 г., Т. 2, стр. 152-155.
  17. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Гаджиев Г.Г., Рамазанова А.Э., Амирова А.А., Аливердиев А.А., К описанию температурной и барической зависимости теплопроводности керамики и песчаника, Материалы Международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетике», Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, 9-11 октября 2017 г., ISBN 978-5-383-01233-8 (Том 2), с. 334-335.
  18. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Амирова А.А., Галжиев Г.Г., Рамазанова А.Э., Малиева Ф.Ф., Расчет теплопроводности песчаника в зависимости от давления// Материалы XII Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченная к 85-летию профессора М.Г. Алишаева, стр. 230-232.
  19. Аливердиев А.А., Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э. Н., Расчет термодинамических характеристик на основе фрактального уравнения состояния на примере воды // Сборник докладов Седьмой Международной научной конференции “Химическая термодинамика и кинетика” 29 мая –2 июня 2017, Великий Новгород, стр. 7-10.
  20. Р.Б. Арсланбекова, И.О. Омаров, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, Об особенностях в фазовой плоскости обобщенной нелинейной системы Дуффинга // Материалы Международного симпозиума «Неравновесные процессы в сплошных средах», Том 1, Пермь 2017, стр. 38-41 (<https://elis.psu.ru/node/424302>)
  21. Р.Р. Мейланов, Р.П. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, В.Д. Бейбалаев, М.Ш. Назаралиев, Р.А. Магомедов, А.А. Аливердиев, О применении дробного исчисления к нелокальной неизотермической фильтрации // Материалы Международной Геотермальной Конференции GEOHEAT 05–08 сентября, 2017 Петропавловск-Камчатский **(принято к публикации)**

**тезисы конференций:**

22. Magomedov R.A., Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Aliverdiev A.A., EOS calculation for Ar and water with the application of fractional order derivatives // Abstracts of XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter March 1-6, 2017, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, Section 3. Equations of State for Matter, P. 83.
23. Magomedov R.A., Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., and Aliverdiev A.A., About the generalization of thermodynamics in fractional order derivatives // Abstracts of XXI International Conference on Chemical Thermodynamics in Russia (RCCT 2017) and School Conference on Chemical Thermodynamics for Young Scientists, June 26-30, 2017, Akademgorodok, Novosibirsk, Russia (2017) P.85.
24. Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Ragimkhanov G.B., Magomedov R.A., Meilanov R.P., Aliverdiev A.A., Application of fractional calculus for local non-isothermal filtration // Abstracts of XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter March 1-6, 2017, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, Section 2. Shock Waves, Detonation and Combustion, 127.
25. Aliverdiev A.A, Meilanov R.P., Meilanov R.R., Beybalaev V.D., Magomedov R.A., Nazaraliev M.-Sh.A., Akhmedov E.N., About the application of fractional calculus to the nonequilibrium process dynamics // Proc. of TMB-2017 (Turbulent Mixing and Beyond, Sixth International Conference 6 Tenth Anniversary Program), Abstracts, 14 - 18 August, 2017, the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Strada Costiera 11, Trieste, Italy, p. 77

Часть результатов находится в работе и будет представлена в последующих отчетах.

# 1 ПОЛНЫЙ ДРОБНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОТ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как известно, для функции многих переменных частные производные дробного порядка могут быть определены как (глава 5 работы [66])

$$\frac{\partial^\alpha F(x, y)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{F(\xi, y)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi, \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

(1.1)

Это в свою очередь позволяет ввести понятие полного дифференциала дробного порядка для функций многих переменных. Рассмотрим приращение функции от двух переменных  $L(x, y)$  как  $L(x + \Delta x, y + \Delta y) - L(x, y)$ .

Представим его в виде

$$L(x + \Delta x, y + \Delta y) - L(x, y + \Delta y) + L(x, y + \Delta y) - L(x, y) \quad (1.2)$$

Разложив в «обобщенный» ряд Тейлора (глава 2 работы [66]) для фиксированного значения  $y$  получим:

$$L(x + \Delta x, y + \Delta y) = L(x, y + \Delta y) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} L(x, y + \Delta y) \cdot (\Delta x)^{\alpha+i} + R(x, y + \Delta y)$$

(1.3)

Аналогично имеем

$$L(x, y + \Delta y) = L(x, y) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} L(x, y) \cdot (\Delta y)^{\alpha+i} + R(x, y) \quad (1.4)$$

и

$$L(x + \Delta x, y + \Delta y) - L(x, y + \Delta y) + L(x, y + \Delta y) - L(x, y) =$$

(1.5)

$$= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} L(x, y + \Delta y) \frac{(\Delta x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} L(x, y) \frac{(\Delta y)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \gamma(x, y + \Delta y) \cdot O((\Delta x)^\alpha) + \gamma(x, y) \cdot O((\Delta y)^\alpha)$$

Определим полный дифференциал дробного порядка как часть приращения (1.5) порядка  $\alpha$ . В случае эту часть (линейная по приращению аргументов) называют полным дифференциалом функции от двух переменных.

Так как в выражении (1.5) последние две слагаемые бесконечно малые величины более высокого порядка, чем  $(\Delta x)^\alpha$  и  $(\Delta y)^\alpha$ , совершая предельный переход и введя обозначения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , а также для приращения  $L(x + \Delta x, y + \Delta y) - L(x, y + \Delta y) + L(x, y + \Delta y) - L(x, y)$  – обозначение  $\Delta L$ , получим

$$(1.6)$$

При равенстве ППДП единице выражение (1.6) переходит в традиционное выражение для полного дифференциала.

Таким образом, для полного дифференциала дробного порядка от функции двух переменных имеет место соотношение (1.6).

## 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОДИНАМИКА В ДРОБНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Преобразование Лежандра для пары термодинамических переменных, например, для пары термодинамических переменных  $T, S$ , которое имеет вид

$$d(TS) = TdS + SdT \quad . \quad (2.1)$$

Для обобщения выражения (2.1), на случай производных дробного порядка, исходим из выражения для полного дифференциала дробного порядка от функции двух переменных (1,6).

Для  $L(x, y) = xy$  при  $x = T$ ,  $y = S$ , а также принимая во внимание, результат

$$\frac{\partial^\alpha(TS)}{\partial T^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T \frac{t \cdot S}{(T-t)^\alpha} dt = \frac{T^{1-\alpha} \cdot S}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad (2.2)$$

получим следующее обобщение преобразования Лежандра в производных дробного порядка

$$d^\alpha(TS) = \frac{T^{1-\alpha} \cdot S}{\Gamma(2-\alpha)} dT^\alpha + \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^\alpha \quad (2.3)$$

Аналогично основное термодинамическое соотношение – второе начало термодинамики:

$$dE = - PdV + TdS \quad (2.4)$$

может быть приведено к виду:

$$d^\alpha E = - \frac{P \cdot V^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dV^\alpha + \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^\alpha . \quad (2.5)$$

Для полного дробного дифференциала потенциала Гельмгольца

$$dF = - PdV - TdS \quad (2.6)$$

имеем

$$d^\alpha F = - \frac{P \cdot V^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dV^\alpha + \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^\alpha \quad (2.7)$$



Аналогично:

$$d^\alpha H = \frac{V \cdot P^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dP^\alpha + \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^\alpha \quad (2.8)$$

$$d^\alpha G = \frac{V \cdot P^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dP^\alpha - \frac{S \cdot T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dT^\alpha \quad (2.9)$$

Таким образом, соотношения Максвелла, обобщенные на случай ДИ, таким образом, принимают вид

$$\left. \frac{\partial^\alpha E}{\partial V^\alpha} \right|_S = - \frac{P \cdot V^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad \left. \frac{\partial^\alpha E}{\partial S^\alpha} \right|_V = \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial^\alpha F}{\partial V^\alpha} \right|_T = - \frac{P \cdot V^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad \left. \frac{\partial^\alpha F}{\partial T^\alpha} \right|_V = - \frac{S \cdot T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{\partial^\alpha H}{\partial P^\alpha} \right|_S = - \frac{V \cdot P^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad \left. \frac{\partial^\alpha H}{\partial S^\alpha} \right|_P = \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

(2.12)

$$\left. \frac{\partial^\alpha G}{\partial P^\alpha} \right|_T = - \frac{V \cdot P^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad \left. \frac{\partial^\alpha G}{\partial T^\alpha} \right|_P = - \frac{S \cdot T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

(2.13)

Соотношения (2.10 – 2.13) при  $\alpha = 1$  переходят в известные соотношения Максвелла для традиционной равновесной термодинамики.

В дальнейшем для удобства будем использовать следующие обозначения для

производных по термодинамическим параметрам  $\left[ \left[ \frac{\partial F}{\partial T} \right] \right]_V \equiv \frac{\partial F}{\partial T}_V$ .

### 3 ФРАКТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

При выводе уравнения состояния используется первое из соотношений (2.11)

$$P = - \left. \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha F}{\partial V^\alpha} \right|_T \quad (3.1)$$

Здесь  $F = -kT \ln Z$  – потенциал Гельмгольца, ) – статистическая сумма, производная дробного порядка дается выражением

$$\frac{\partial^\alpha F(V)}{\partial V^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial V} \int_0^V \frac{F(v)}{(V - v)^\alpha} dv \quad (3.2)$$

Соотношение (3.1) при  $\alpha = 1$  лежит в основе традиционного подхода при выводе уравнения состояния, в остальных случаях имеем новый однопараметрический класс уравнений состояния.

Выражение для потенциала Гельмгольца в случае классической статистической физики [2] имеет вид  $F = -kT \ln Z$ , где  $Z$  – статистическая сумма, которая в общем случае задается как

$$Z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int \dots \int \exp\left(-\frac{H}{kT}\right) d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \quad (3.3)$$

Здесь  $N$  – число частиц в системе,  $\mathbf{p}$  – импульс частицы,  $\mathbf{r}$  – координата частицы.

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (3.4)$$

сумма кинетической и потенциальной энергий частиц. Подставляя (3.4) в (3.3) получим

$$Z = \frac{Q(N, V, T)}{N! \Lambda^{3N}} \quad (3.5)$$

где  $\Lambda$  – тепловая длина частицы,

$\int \dots \int$  – конфигурационный интеграл.

Представим (3.5) в виде

$$Z = \frac{V^N}{N! \Lambda^{3N}} \left[ 1 + \frac{1}{V^N} \int \dots \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) - 1 \, dr_1 \dots dr_N \right]$$

для потенциала Гельмгольца получим

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln \left[ \frac{V^N}{N! \Lambda^{3N}} \right] + \ln \left[ 1 + \frac{1}{V^N} \int \dots \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) - 1 \, dr_1 \dots dr_N \right] \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.2) получим следующее уравнения состояния

$$P = kT \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial V^\alpha} \ln \left[ \frac{V^N}{N! \Lambda^{3N}} \right] + \ln \left[ 1 + \frac{1}{V^N} \int \dots \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) - 1 \, dr_1 \dots dr_N \right] \quad (3.7)$$

Вычисляя производную дробного порядка от первой слагаемой, используя при этом интеграл [68]

$$\int_0^a \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{(a^\mu - x^\mu)^{1-\beta}} dx = a^{\alpha+\mu(\beta-1)} B(\beta, \alpha/\mu) [\mu \ln a + \psi(\alpha/\mu) - \psi(\beta + \alpha/\mu)];$$

$$a, \mu, \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0; \operatorname{Re} \beta > -1 \text{ при } \alpha = 1,$$

где  $B(x, y)$  – бета-функция Эйлера,  $\psi$  – пси-функция, получим

$$\begin{aligned}
P = & \frac{NkT}{V} \ln \left[ 1 + (1 - \alpha) \cdot \ln \left[ \frac{eV}{N} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) \right] + \\
& + kT \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial V^\alpha} \ln \left[ 1 + \frac{1}{V^N} \int \dots \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) - 1 \, d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \right]
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

В приближении парного взаимодействия, где  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} u(r_{ij})$ , уравнение

(3.8) принимает вид

$$\begin{aligned}
P = & \frac{NkT}{V} \ln \left[ 1 + (1 - \alpha) \cdot \ln \left[ \frac{eV}{N} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) \right] - \\
& - kT \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial V^\alpha} \ln \left[ 1 - \frac{A(T)}{V} \right]
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

где  $A(T) = \frac{N(N-1)}{2} \int \left[ 1 - \exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) \right] dr$

Вычисляя производную дробного порядка во втором слагаемом в (3.9), используя при этом результат [68]

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \ln(x+b)}{(x+a)^\rho} dx = & a^{\alpha-\rho} B(\alpha, \rho - \alpha) [\ln b + \psi(\rho) - \psi(\rho - \alpha) - \\
& - \frac{\alpha}{\rho} (1 - ab^{-1}) {}_3F_2(\alpha + 1, 1, 1; 2, \rho + 1; 1 - ab^{-1})]
\end{aligned}$$

где  ${}_3F_2(a, b, c; d; a)$  – гипергеометрический ряд, окончательно получим следующее уравнение состояния

$$P = \frac{NkT}{V} \ln \left[ 1 + (1 - \alpha) \cdot \ln \left[ \frac{eV}{N} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) \right] -$$

$$-kT \left\{ \frac{1-\alpha}{V} \left[ \ln \left( 1 + \frac{A}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) - (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)(2-\alpha+k)} \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-k-1} \right] - \frac{A}{V^2} \left[ \frac{1}{1+\frac{A}{V}} + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2-\alpha+k)} \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-k-2} \right] \right\} \quad (3.10)$$

Отметим, что входящие в (3.10) ряды сходятся в силу малости параметра  $\left[ 1 + \frac{A}{V} \right]^{-1}$ .

Для дальнейшего удобно исходить из выражения  $A(T) = N^2 B(T)$ , где

$$B(T) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) \right] dr - \text{второй вириальный коэффициент.}$$

В результате уравнение (3.10) окончательно принимает вид

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + (1-\alpha) \left[ \ln \left( \frac{\varepsilon V}{VN} \left[ \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right) + \psi(1) - \psi(2-\alpha) - \frac{1-\alpha}{N} \left[ \ln \left( 1 + \frac{N^2 B}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) - (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)(2-\alpha+k)} \left( 1 + \frac{N^2 B}{V} \right)^{-k-1} \right] - \frac{NB}{V} \left[ \frac{1}{1+\frac{N^2 B}{V}} + (1-\alpha) \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2-\alpha+k)} \left( 1 + \frac{N^2 B}{V} \right)^{-k-2} \right] \right] \right\} \quad (3.11)$$

В случае, когда  $\frac{A(T)}{V} < 1$  можно пренебречь малым вкладом от членов, содержащих суммы, и вместо (3.11) получим

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + \frac{NB}{V} + (1-\alpha) \left( \ln \frac{\varepsilon V}{N} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} + \psi(1) - \psi(2-\alpha) - \frac{NB}{V} \right) \right\} \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) при  $\alpha=1$  совпадает с обычным вириальным уравнением состояния, и представляет собой «фрактальное» уравнение состояния с учетом второго вириального коэффициента.

Определим выражения для энтропии и изохорной теплоемкости.

Для энтропии исходим из выражения .

При учете второго вириального коэффициента необходимо задать его явную зависимость от температуры. Используем для него выражение

,

где  $b$  – параметр, учитывающий объем молекулы,  $a$  – параметр, связанный с потенциалом межмолекулярного взаимодействия. Проведя расчеты, аналогичные при выводе уравнения состояния окончательно получим следующее выражение для энтропии

$$S = \frac{3}{2} Nk \left[ \frac{1}{(2-\alpha)} + \ln \left( \left( \frac{eV}{N} \right)^{2/3} \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right) + \psi(2) - \psi(3-\alpha) \right] + k \left[ \ln \left( 1 - \frac{A(T)}{V} \right) - \frac{1}{2-\alpha} \frac{N^2 a/T}{1 - \frac{A(T)}{V}} + \psi(2) - \psi(3-\alpha) \right] - k(1-\alpha) \left[ (2-\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(1-N^2 b/V)/(1-A/V)]^{n+1}}{(n+1)(n+2-\alpha)(n+3-\alpha)} + \frac{N^2 a/T}{1 - \frac{A(T)}{V}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(1-N^2 b/V)/(1-A/V)]^{n+1}}{(n+2-\alpha)(n+3-\alpha)} \right]$$

Первое слагаемое соответствует случаю идеального газа, второе и третье слагаемые соответствуют учету второго вириального коэффициента. В приближении линейном по малому параметру  $A(T)/V \ll 1$ , окончательно, имеем

$$S = \frac{3}{2} Nk \left[ \frac{1}{(2-\alpha)} + \ln \left( \left( \frac{eV}{N} \right)^{2/3} \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right) + \psi(2) - \psi(3-\alpha) \right] - Nk \left( \frac{Nb}{V} + \frac{Na}{VT} \left( \frac{1}{2-\alpha} - (1-\alpha)^2 \chi(\alpha) \right) \right)$$

Здесь  $\chi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2-\alpha)} \frac{1}{(n+3-\alpha)}$ . Или с учетом выражения для второго

вириального коэффициента  $B(T) = \left( b - \frac{a}{kT} \right)$  получим

$$S = \frac{3}{2} Nk \left[ \frac{1}{(2-\alpha)} + \ln \left( \left( \frac{eV}{N} \right)^{2/3} \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right) + \psi(2) - \psi(3-\alpha) \right] - Nk \left( \frac{Nb}{V} - (1-\alpha) \frac{Na}{VT} \left( \frac{1}{2-\alpha} + (1-\alpha) \chi(\alpha) \right) \right) \quad (3.13)$$

Для теплоемкости при постоянном объеме, исходя из обобщенного выражения

$C_V = T^\alpha \frac{\partial^\alpha S}{\partial T_V^\alpha}$ , получим следующий результат

$$C_V = T^\alpha \frac{\partial^\alpha S}{\partial T_V^\alpha} = \frac{3}{2} Nk \left\{ 1 + (1 - \alpha) \left( \ln \left[ \left( \frac{\epsilon V}{N} \right)^{2/3} \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right] - 1 \right) \right\} +$$

$$+ kT^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial T^\alpha} \left\{ \ln \left( 1 - \frac{A(T)}{V} \right) - \frac{1}{2-\alpha} \frac{N^2 a/T}{1 - \frac{N^2 b}{V} + \frac{N^2 a/T}{V}} + \psi(3 - \alpha) - \psi(2) - \right.$$

$$\left. - (1 - \alpha) \left[ (2 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1 - N^2 b/V)/(1 - A/V)]^{n+1}}{(n+1)(n+2-\alpha)(n+3-\alpha)} + \frac{N^2 a/T}{1 - \frac{A(T)}{V}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(1 - N^2 b/V)/(1 - A/V)]^{n+1}}{(n+2-\alpha)(n+3-\alpha)} \right] \right\}$$

Входящая в это выражение, производная дробного порядка вычисляется так же, как и при расчете выражения для энтропии. В линейном по малому параметру  $A(T)/V \ll 1$  приближении, окончательно, получим следующее выражение для изохорной теплоемкости

$$C_V = \frac{3}{2\Gamma(2-\alpha)} Nk \left\{ 1 - \frac{2}{3} \frac{Na}{VkT} + (1 - \alpha) \left( \ln \left[ \left( \frac{\epsilon V}{N} \right)^{2/3} \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right] - 1 - \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left( b - \frac{a}{kT} \right) \right) \right\} \quad (3.14)$$

При равенстве ППДП единице выражение (3.14) совпадает с известным значением изохорной теплоемкости.

Для обобщения уравнения Ван-дер-Ваальса исходим из уравнения состояния (3.7), используя для  $B(T)$  выражение  $B(T) = b - \frac{a}{kT}$ , где  $b$  - параметр, учитывающий объем молекулы  $a$  - параметр, связанный с потенциалом межмолекулярного взаимодействия [69], получим

$$\frac{A(t)}{V} = -N^2 \frac{b}{V} + N^2 \frac{a}{TV} \approx N \ln \left( 1 - \frac{Nb}{V} \right) + N^2 \frac{a}{TV}$$

Подставляя полученное выражение в уравнение состояния (3.7) и вычисляя производную, получим

$$P = \frac{NkT}{V} \left[ 1 + (1 - \alpha) \cdot \ln \left[ \frac{eV}{N} \left[ \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right]^{3/2} \right] + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) \right] +$$

$$+ \frac{NkT}{V} \frac{Nb}{V - Nb} - \frac{N^2 a}{V^2} + (1 - \alpha) \frac{kT}{V} N \ln \left( 1 - \frac{Nb}{V} \right) + N^2 \frac{a}{TV} - \psi(1)$$

Объединяя в правой части две слагаемые, получим

$$P = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{N^2 a}{V^2} + (1 - \alpha) \frac{NkT}{V} \left[ \ln \left[ \frac{eV}{N} \left[ \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right]^{3/2} \right] + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) + \ln \left( 1 - \frac{Nb}{V} \right) \right] + N \frac{a}{TV}$$

Преобразуя полученное выражение, имеем

$$(P + \frac{N^2 a}{V^2})(V - Nb) =$$

$$= NkT \left\{ 1 + (1 - \alpha) \frac{(V - Nb)}{V} \left[ \ln \left( \frac{e(V - Nb)}{N} \left[ \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right]^{3/2} \right) + N \frac{a}{kTV} + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) \right] \right\}$$

(3.15)

Уравнение (3.15) при  $\alpha = 1$  совпадает с известным уравнением Ван-дер-Ваальса. И представляет собой «фрактальное» уравнение состояния. В остальных случаях имеем ФУС Ван-дер-Ваальса.



#### 4 РАСЧЕТ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АРГОНА И НЕОНА НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Наличие нового параметра ППДП в уравнении состояния, смысл которого заключается в возможности учета сложной природы потенциала взаимодействия между частицами, позволяет расширить область применимости фрактального уравнения состояния. Для удобства сравнения перепишем полученные уравнения (3.12)-(3.13) в соответствии с единицами измерения справочных данных

$$P = \rho R_f T \left( 1 + \rho B + (1 - \alpha) \times \right. \\ \left. \times \ln \left[ \frac{eM}{\rho N_A} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] + \psi(1) + \psi(2 - \alpha) - \rho B \right], \quad (4.1)$$

$$S = \frac{3}{2} R_f \ln \left[ \frac{eM}{\rho N_A} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{2/3} \right] + \\ + \frac{3}{2} R_f \left[ \frac{1}{2 - \alpha} + \psi(2) + \psi(3 - \alpha) \right] - \\ - R_f \frac{\rho}{M} \left[ b - (1 - \alpha) \frac{5 - 2\alpha}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \frac{a}{N_A kT} \right] \quad (4.2)$$

Для изохорной теплоемкости исходя из обобщенного соотношения  $C_V = T^\alpha \frac{\partial^\alpha S}{\partial T^\alpha_V}$

(которое при  $\alpha = 1$  переходит в известное соотношение  $C_V = T \frac{\partial S}{\partial T_V}$ ) и выражения для энтропии, имеем

$$C_V = \frac{3}{2} \frac{R_f}{\Gamma(2 - \alpha)} \left[ 1 - \frac{18P_c b^2}{N_A kT} + (1 - \alpha) \times \right. \\ \left. \times \ln \left[ \frac{eM}{\rho N_A} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{2/3} \right] - 1 - \rho b \left[ \frac{2}{3} - \frac{18P_c b^2}{N_A kT} \right] \right] \quad (4.3)$$

В выражениях (4.1)-(4.3)  $P$  – давление, Па;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $R_г=208,131$  Дж/(кг·К) – удельная газовая постоянная;  $M=39,948\cdot 10^{-3}$  кг/моль – молярная масса неона;  $T$  – температура, К;  $N_A=6,02214\cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> – постоянная Авогадро;  $m=6,633521\cdot 10^{-26}$  кг – масса атома аргона;  $k=1,3806\cdot 10^{-23}$  Дж·с – постоянная Больцмана;  $\hbar=1,05457\cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка;  $B(T)=b - \frac{a}{kT}$  – второй вириальный коэффициент (для  $T=1000$  К  $B=5,507\cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/кг),  $a$  и  $b$  – постоянные Ван-дер-Ваальса,  $P_c = \frac{a}{27b^2} = 4,86\cdot 10^6$  Па – критическое давление,  $e=2,71828\dots$  – экспонента.

Сравнения рассчитанных и табличных значений этих величин для давлений от 1 до 1 МПа для аргона и неона при температуре 500 К, 900 К и 1500 К соответственно приведены в таблицах 4.6.-4.8. (суммаризированы по результатам публикаций [9, 19, 27] за 2017 год).

Таким образом, установлено, что исходя из обобщения равновесной термодинамики на случай производных дробного порядка, можно вывести однопараметрическое уравнение состояния (ОУС) и на его основании получить аналитические выражения для ТХ вещества. Как показывают проведенные нами расчеты, результаты удовлетворительно соответствуют экспериментально измеренным данным.

Таблица 4.6. Тепловые свойства неона и аргона,  $T=500\text{ K}$

$P$ , МПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$z$ [24]	$z$	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К) [70]	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К)	$A$
Неон, $B_2=6.738 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$ [71]						
1.0	4.84	1.0033	1.00326	6.839	6.83900	0.99999
2.0	9.65	1.0066	1.00657	6.553	6.55294	0.99999
3.0	14.42	1.0099	1.01003	6.386	6.38601	0.99998
4.0	19.17	1.0132	1.01305	6.267	6.26690	0.99997
5.0	23.88	1.0165	1.01650	6.175	6.17501	0.99997
6.0	28.57	1.0197	1.01958	6.100	6.09992	0.99997
8.0	37.84	1.0263	1.02640	5.981	5.98096	0.99993
10.0	47.00	1.0329	1.03296	5.888	5.88802	0.99991
Аргон, $B_2=1.827 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$ [71]						
1.0	0.96	1.0002	1.00097	4.145	6.83900	0.99996
2.0	9.59	1.0017	1.00200	3.664	6.55294	0.99998
3.0	19.15	1.0035	1.00358	3.519	6.38601	0.99999
4.0	28.67	1.0054	1.00550	3.433	6.26690	0.99998
5.0	38.16	1.0074	1.00726	3.372	6.17501	0.99998
6.0	47.60	1.0095	1.00938	3.324	6.09992	0.99995
8.0	57.00	1.0116	1.01150	3.284	5.98096	0.99992
10.0	75.66	1.0161	1.16048	3.222	5.88802	0.99984

Таблица 4.7. Тепловые свойства неона и аргона,  $T=900$  К

$P$ , МПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$z$ [70]	$z$	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К) [70]	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К)	$\alpha$
Неон, $B_2=7,085 \cdot 10^{-4}$ м <sup>3</sup> /кг [71]						
0.1	0.27	1.0002	1.00019	8.393	8.39298	0.99999
1.0	2.69	1.0019	1.00267	7.445	7.44203	0.99954
2.0	5.37	1.0038	1.00453	7.159	7.15684	0.99954
3.0	8.05	1.0057	1.00641	6.992	6.98999	0.99954
4.0	10.71	1.0076	1.00827	6.874	6.87249	0.99954
5.0	13.36	1.0095	1.01015	6.782	6.78085	0.99954
6.0	16.00	1.0114	1.01202	6.707	6.70632	0.99954
8.0	21.25	1.0153	1.01590	6.588	6.58699	0.99954
10.0	26.47	1.0190	1.01959	6.496	6.49769	0.99954
Аргон, $B_2=-5,007 \cdot 10^{-4}$ м <sup>3</sup> /кг [71]						
1.0	5.32	1.0026	1.00287	3.971	3.970590	0.99999
2.0	10.62	1.0051	1.00552	3.827	3.826590	0.99999
3.0	15.89	1.0077	1.00815	3.742	3.741589	0.99999
4.0	21.14	1.0103	1.01077	3.682	3.681589	0.99999
5.0	26.35	1.0129	1.01338	3.635	3.634588	0.99999
6.0	31.54	1.0156	1.01594	3.597	3.596571	0.99999
8.0	41.84	1.0208	1.02109	3.536	3.535590	0.99999
10.0	52.03	1.0261	1.02620	3.489	3.488595	0.99999
12.0	62.11	1.0315	1.03140	3.450	3.449594	0.99998
16.0	81.95	1.0423	1.04236	3.389	3.388592	0.99991
20.0	101.37	1.0532	1.05323	3.342	3.341579	0.99983

Таблица 4.8. Тепловые свойства неона и аргона,  $T=1500$  К

$P$ , МПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$z$ [70]	$z$	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К) [70]	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К)	$\alpha$
Неон, $B_2=6.986 \cdot 10^{-4}$ м <sup>3</sup> /кг [71]						
1.0	1.62	1.0011	1.00135	7.971	7.97048	0.99999
5.0	8.05	1.0056	1.00583	7.308	7.30770	0.99999
10.0	16.01	1.0111	1.01157	7.023	7.02271	0.99998
20.0	31.66	1.0222	1.02249	6.737	6.73597	0.99998
30.0	46.99	1.0332	1.03326	6.571	6.57241	0.99997
40.0	62.00	1.0441	1.04427	6.453	6.45784	0.99995
50.0	76.70	1.0550	1.05535	6.361	6.37370	0.99990
Аргон, $B_2=6.058 \cdot 10^{-4}$ м <sup>3</sup> /кг [71]						
1.0	3.20	1.0019	1.001961	4.237	4.23701	0.99999
5.0	15.86	1.0095	1.009833	3.902	3.90225	0.99999
10.0	31.43	1.0191	1.019134	3.757	3.75722	0.99999
20.0	61.71	1.0382	1.038261	3.612	3.61589	0.99995
30.0	90.89	1.0573	1.057675	3.527	3.54412	0.99986
40.0	119.03	1.0764	1.077256	3.467	3.51036	0.99972
50.0	146.18	1.0956	1.097094	3.419	3.49470	0.99953

## 5. ФРАКТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

Для учета многокомпонентности исходим из выражения

$$H = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{p_n^2}{2m_1} + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{p_n^2}{2m_2} + \sum_{n=1}^{N_3} \frac{p_n^2}{2m_3} + U(r_1, \dots, r_{N_1}, r_{N_1+1}, \dots, r_{N_1+N_2}, r_{N_1+N_2+1}, \dots, r_{N_1+N_2+N_3}) \quad (5.1)$$

– суммы кинетической и потенциальной энергий частиц.  $N = N_1 + N_2 + N_3$

Подставляя (5.1) в (3.3) получим

$$Z = \frac{V^N Q(N, V, T)}{N! \Lambda^{3N}} \quad (5.2)$$

где  $x+y+z=1$ ,  $\Lambda = \sqrt{2\pi \hbar^2 / m_1^x m_2^y m_3^z kT}$  – эффективная тепловая длина частицы,

$$Q(N, V, T) = \frac{1}{V^N} \int \dots \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) dr_1 \dots dr_{N_1+N_2+N_3} \text{ – конфигурационный интеграл.}$$

Дальнейшее рассмотрение зависит от вида потенциальной энергии  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ .

В случае приближения парного взаимодействия,  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  (в дальнейшем рассматривается случай центрального потенциала) принимает вид

$$Q(N, V, T) = \frac{1}{V^N} \int \dots \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) dr_1 \dots dr_{N_1+N_2+N_3}, U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_1+N_2+N_3}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N_1} u_1(r_{ij}) + \sum_{1 \leq i < j \leq N_2} u_2(r_{ij}) + \sum_{1 \leq i < j \leq N_3} u_3(r_{ij}) + \sum_{i,j}^{N_1, N_2} u_{12}(r_{ij}) + \sum_{i,j}^{N_1, N_3} u_{13}(r_{ij}) + \sum_{i,j}^{N_2, N_3} u_{23}(r_{ij})$$

Введя функции  $\exp(-u_{i,n}(r_{ij})) = f_{i,n}(r_{ij}) + 1$  конфигурационный интеграл можно

привести к виду

$$Q(N, V, T) = 1 - \frac{N}{V} \sum_{i=1}^3 x_i B_i - \frac{N}{V} \sum_{i < j=1}^3 x_{ij} B_{ij},$$

где  $x_i = \frac{N_i}{N}$  - концентрация (молярная доля),  $x_{ij} = \frac{\sqrt{N_i N_j}}{N}$ ,  $B_i = \frac{N_i}{2} \int \left(1 - \exp\left(-\frac{u_i(r)}{kT}\right)\right) dr$

$$B_{ij} = \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2} \int \left(1 - \exp\left(-\frac{u_{ij}(r)}{kT}\right)\right) dr$$

Для потенциала Гельмгольца получим следующее выражение

$$F = -kT \left\{ \ln\left(\frac{v^N}{N! \Lambda^{3N}}\right) + \ln\left(1 - \frac{N}{v} \sum_{i=1}^3 x_i B_i - \frac{N}{v} \sum_{i<j=1}^3 x_{ij} B_{ij}\right) \right\} \quad (5.3)$$

Подставляя (5.3) в (3.7) получим следующее уравнения состояния

$$P = kT \frac{\Gamma(2-\alpha)}{v^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial v^\alpha} \left[ \ln\left(\frac{v^N}{N! \Lambda^{3N}}\right) + \ln\left(1 - \frac{N}{v} \sum_{i=1}^3 x_i B_i - \frac{N}{v} \sum_{i<j=1}^3 x_{ij} B_{ij}\right) \right]$$

Вычисляя производную дробного порядка, окончательно получим следующее уравнение состояния (Приложение А)

$$P = kT \frac{\Gamma(2-\alpha)}{v^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial v^\alpha} \left[ \ln\left(\frac{v^N}{N! \Lambda^{3N}}\right) + \ln\left(1 - \frac{N}{v} \sum_{i=1}^3 x_i B_i - \frac{N}{v} \sum_{i<j=1}^3 x_{ij} B_{ij}\right) \right], \quad (5.4)$$

где  $B(T) = \left(\sum_{i=1}^3 x_i B_i + \sum_{i<j=1}^3 x_{ij} B_{ij}\right)$  – обобщенный второй вириальный коэффициент

При равенстве ППДП единице уравнение состояния (5.4) совпадает с традиционным уравнением состояния.

Аналогично для энтропии, изохорной теплоемкости и энтальпии получим:

$$S = \frac{3}{2} Nk \left[ \frac{1}{2-\alpha} + \ln qT + \psi(2) - \psi(3-\alpha) \right] - Nk \left[ \frac{Nb}{v} - (1-\alpha) \frac{5-2\alpha}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \frac{Na}{vT} \right] \quad (5.5)$$

$$C_V = \frac{3}{2} Nk \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ 1 - \frac{2Na}{3vT} + (1-\alpha) \left( \ln qT - \frac{2Nb}{3v} + \frac{4}{3} \frac{5-\alpha(5-\alpha)}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \frac{Na}{vT} \right) \right\} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{3}{2} Nk [1 + 2(\psi(1) - \psi(2-\alpha))] \right\}$$

(5.6)

$$\begin{aligned}
H = NkT \left\{ 1 + \frac{B(T)}{v} - \frac{Nb}{v} + \frac{B(T)}{v} + \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{2-\alpha} + \psi(2) - \psi(3-\alpha) \right] + (1-\alpha) \left[ \frac{5-2\alpha}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \frac{Na}{vT} + \right. \right. \\
\left. \left. + \ln \left( \frac{eV}{N} \left[ \frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi \hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right) + \psi(1) - \psi(2-\alpha) - \frac{B(T)}{v} \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{5.7}$$

С помощью выражений (5.4 – 5.7) можно вычислить соответствующие ТХ многокомпонентных систем.



## 6. РАСЧЕТ ЭНТРОПИИ, ТЕПЛОЕМКОСТИ, СЖИМАЕМОСТИ ВОДЫ

Результаты расчета энтропии и коэффициента сжимаемости, полученные из значения второго вириального коэффициента  $B$ , взятого из [72], и ППДП, рассчитанного по решению уравнения (1.17) и табличным значениям давления относительно заданных плотности и температуры, представлены в таблицах 5.1 и 5.2 для 800 К и 900 К соответственно (суммаризированы по результатам публикаций [19, 28] за 2017 год).

**Таблица 5.1.** ТС водяного пара при  $T=800$  К ( $B=-2,621 \times 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/кг [72]).

$P$ , МПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$z$ [70]	$z$	$S$ [70]×10 <sup>3</sup> , Дж/(кг·К)	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К)	$\alpha$
1,0	2,73	0,9933	0,99316	7,837	7,83702	0,9999
2,0	5,49	0,9865	0,98667	7,508	7,50796	0,9999
3,0	8,29	0,9797	0,98012	7,312	7,31203	0,9999
4,0	11,14	0,9728	0,97251	7,170	7,17018	0,9999
5,0	14,02	0,9658	0,96591	7,057	7,05698	0,9998
6,0	16,95	0,9588	0,95873	6,963	6,96302	0,9998
8,0	22,94	0,9445	0,94452	6,810	6,81004	0,9997
10,0	29,13	0,9300	0,92977	6,686	6,68605	0,9996

**Таблица 5.2.** ТС водяного пара при  $T=900$  К ( $B=-2,621 \times 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/кг [72]).

$P$ , МПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$z$ [70]	$z$	$S$ [70]×10 <sup>3</sup> , Дж/(кг·К)	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К)	$\alpha$
1,0	2,42	0,9958	0,99613	8,096	8,09606	0,9999
2,0	4,86	0,9916	0,99216	7,770	7,77005	0,9999
3,0	7,31	0,9874	0,98802	7,577	7,57694	0,9999
4,0	9,79	0,9832	0,98368	7,438	7,43797	0,9998
5,0	12,30	0,9790	0,97916	7,329	7,32896	0,9998
6,0	14,82	0,9748	0,97425	7,238	7,23803	0,9998
8,0	19,93	0,9662	0,96574	7,093	7,09305	0,9997
10,0	25,14	0,9577	0,95756	6,977	6,97701	0,9996

При выбранных температурах ППДП в достаточно широком диапазоне давлений близок к единице, и его правильный выбор позволяет проводить достаточно точный расчет основных ТХ, от 0,01 % до 3,5 % в зависимости от рассчитываемого параметра. Такие значения ППДП могут свидетельствовать о достаточно небольшом влиянии нелокальных эффектов в данном диапазоне. При давлениях от 1 МПа до 4 МПа поведение сохраняется и при понижении температуры (см. таблицу 5.3).

**Таблица 5.3.** ТС водяного пара при  $T=413,15$  К и  $B=-2,621 \times 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/кг [71]

$P \times 10^5$ ,	$\rho$ ,	$S[74] \times 10^3$ ,	$S \times 10^3$ ,	$C_v \times 10^3$ ,	$\alpha$	$z$
-------------------	----------	-----------------------	-------------------	---------------------	----------	-----

Па	кг/м <sup>3</sup>	Дж/(кг·К)	Дж/(кг·К)	Дж/(кг·К)		
0,5	0,2635	7,890	7,890	3,181	0,999	0,995
1,0	0,5305	7,562	7,562	3,170	0,999	0,991
1,6	0,8525	7,337	7,337	3,164	0,999	0,984
2,0	1,0687	7,227	7,227	3,159	0,999	0,981

Расчет ТХ на линии насыщения показал, что ППДП здесь заметно отличен от единицы, и испытывает скачок при фазовом переходе. Данные для точки на линии насыщения ( $P=22,56$  МПа,  $T=647,15$  К) как для водяного пара, так и для жидкости представлены в таблице 5.4.

Таблица 5.4. ТС водяного пара и воды на линии насыщения,

$$P=22,56 \text{ МПа, } T=647,15 \text{ К, } V=-25 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг} [73].$$

	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$z$	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К) [74]	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К)	$\alpha$
Пар	288	0,2623	1,0755	1,07547	0,6378
жидкость	357,14	0,2115	1,0332	1,03318	0,5781

Таблица 5.5. ТС воды при  $T=293,15$  К и  $V=0,001$  м<sup>3</sup>/кг [75]

$P \times 10^5$ , Па	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$S[74] \times 10^3$ , Дж/(кг·К)	$S \times 10^3$ , Дж/(кг·К)	$C_v \times 10^3$ , Дж/(кг·К)	$\alpha$	$z$ $\times 10^{-4}$
0,5	0,9982	0,2964	0,2964	3,027	0,1256	3,702
1,0	0,9982	0,2964	0,2964	3,051	0,1256	7,405
1,6	0,9983	0,2964	0,2964	3,157	0,1256	11,85
2,0	0,9983	0,2964	0,2964	3,177	0,1256	14,81

## 7. РАСЧЕТ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФРЕОНА R409B НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Для расчета ППДП перепишем уравнение (5.4) в виде

$$P = \rho R_{cm} T \left[ 1 + \frac{\rho B}{M} + (1 - \alpha) \times \right. \\ \left. \times \ln \left[ \frac{eM}{\rho N_A} \left( \frac{m_{cm} k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) - \frac{\rho B}{M} \right] \quad (7.1)$$

где  $M = 96,67 \times 10^{-3}$  кг/моль – молекулярный вес;  $B = -900 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup>/моль – второй вириальный коэффициент;  $m_{cm} = m_1^x m_2^y m_3^z$

Соответственно выражения для фактора сжимаемости и энтропии принимают вид:

$$z = 1 + \frac{\rho B}{M} + (1 - \alpha) \cdot \ln \left[ \frac{eM}{\rho N_A} \left( \frac{m_{cm} k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) - \frac{\rho B}{M} \quad (7.2)$$

$$S = \frac{R_{cm}}{M} \left( \ln \left[ \frac{eM}{\rho N_A} \left( \frac{m_{cm} k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right) + \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{(2 - \alpha)} + \psi(2) - \psi(3 - \alpha) \right] -$$

$$-\frac{\rho}{M} \left( b - (1 - \alpha) \frac{b}{\alpha} \right) \quad (7.3)$$

В таблице 7.1 приведены значения энтропии  $S$  для фреона  $R409B$  (фреон  $R409B$  – состоит из компонентов  $R22/ R124/ R142B$  (состав – 65/25/10 (масс. %))), рассчитанные в среде программы *REFPROP* [76] и расчетные значения энтропии  $S$  по формуле (7.3).

Как видно из полученных результатов в таблице 7.1, максимальное отклонение значения энтропии  $S$ , вычисленного по формуле (6.3), от значения энтропии  $S$ [NIST], рассчитанной в среде программы *REFPROP*, составляет ~0,5%. Предложенный метод позволяет рассчитать и другие ТХ фреона  $R409B$ .

**Таблица 7.1 Энтропия  $S$  и сжимаемость  $z$  фреона R409B**

**при  $V(T) = -900 \times 10^{-6}$  (м<sup>3</sup>/моль)**

T, K	P, МПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	S[NIST], Дж/ (кг · К)	S, Дж/ (кг · К)	$\alpha$	z	b, $\times 10^{-3}$ , м <sup>3</sup> /кг	a, (Па · м <sup>6</sup> )/кг <sup>2</sup>
210	0,014480	0,80868	1,8489	1,849	0,996593	0,991	-60,5	90,07
220	0,027147	1,4547	1,8204	1,82	0,993631	0,986	-46,0	68,38
230	0,047651	2,4595	1,7966	1,796	0,988887	0,979	-34,8	49,50
240	0,079073	3,9476	1,7746	1,766	0,981685	0,97	-26,3	34,62
250	0,12505	6,0642	1,7598	1,76	0,971328	0,959	-20,0	23,25
270	0,27780	12,882	1,7335	1,733	0,938049	0,929	-12,0	7,87
300	0,73452	33,082	1,7053	1,705	0,846636	0,86	-7,1	-4,63
330	1,6075	74,629	1,6815	1,681	0,697713	0,759	-5,0	-10,73
350	2,5194	126,14	1,6613	1,661	0,598055	0,663	-4,5	-12,95
370	3,8017	229,66	1,6238	1,624	0,409285	0,52	-4,3	-14,37

## 8. НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА В ДРОБНОМ ИСЧИСЛЕНИИ. ЗАДАЧА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С УЧЕТОМ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭФФЕКТОВ

В настоящее время можно считать установленным, что математический аппарат ДИ представляет новый подход в описании процессов переноса в системах, для которых существенен учет нелокальных свойств по времени и пространству. Операция дифференцирования дробного порядка, включая в себя определенное сочетание обычных производных и интегралов, открывает принципиально новый подход к теории нелокальных дифференциальных уравнений и их прикладных аспектов. Дробное исчисление, внося в теорию дополнительные параметры в виде ППДП, дает возможность использования широкого класса многопараметрических функций и открывает, тем самым, принципиально новые возможности интерпретации экспериментальных данных и создания адекватных количественных моделей процессов нелокального переноса

Рассмотрим в качестве конкретного примера задачу нелокальной неизотермической фильтрации в пористых многофазных структурах (характерных для реальных систем скважина-пласт).

При исследовании процессов тепломассопереноса в сложных средах, таких как осадочные породы, используется метод эффективной среды. Существует два подхода введения эффективной среды. В первом случае исходят из микроскопических уравнений с последующем их усреднением. Процедура усреднения при этом играет ключевую роль и определяет окончательный вид макроскопических уравнений. Второй подход основан на применении макроскопических уравнений, в которых используются различные соотношения между обобщенными силами и соответствующими потоками. К таким соотношениям относятся закон Фурье для процессов переноса тепла и закон Дарси для процессов переноса жидкости. От этих законов и зависит вид получающихся уравнений тепломассопереноса.

Для процессов переноса в пористых средах важным становится учет нелокальных эффектов по времени и координате. Обобщение закона Дарси, когда нелокальные эффекты учитываются в виде интегральных соотношений, приводят к интегро-дифференциальным уравнениям фильтрации. Решение таких уравнений сталкиваются с принципиальными трудностями. Учет эффектов памяти (временная нелокальность) и пространственных корреляций (пространственная нелокальность), в рамках традиционных подходов приводит к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, где его ядро несет информацию о природе нелокальности. Для решения таких уравнений интегральные операторы представляются в виде ряда дифференциальных операторов с

возрастающим показателем порядка дифференцирования и при наличии малого параметра ограничиваются несколькими членами ряда. В отсутствие малого параметра такой подход оказывается непродуктивным и, кроме того, полученные уравнения также не всегда удается решить.

Новый этап в развитии неізотермической фильтрации связан с применением математического аппарата ДИ, где уравнения нелокальной неізотермической фильтрации в дробном исчислении имеют вид [21]:

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{T(\xi, z)}{(\tau-z)^\alpha} dz - \frac{T(\xi, 0)}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha},$$

и

$$\frac{\partial^\beta T(\xi, \tau)}{\partial \xi^\beta} = \frac{1}{2\Gamma(2-\beta) \cos\left(\frac{\pi}{2}(2-\beta)\right)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi', \tau)}{|\xi - \xi'|^{(\beta-1)}} d\xi'$$

в линейном приближении по возмущениям температуры и давления нами была получена следующая система уравнений неізотермической фильтрации:

$$\frac{\partial^\alpha P(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} - D_p(\xi, \tau) \frac{\partial^\beta P(\xi, \tau)}{\partial \xi^\beta} = \frac{P(\xi, 0)}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{\beta\alpha}{\rho_0} \frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} - D_T(\xi, \tau) \frac{\partial^\beta P(\xi, \tau)}{\partial \xi^\beta} = \frac{T(\xi, 0)}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{\beta\alpha}{c_p \rho_0} T(\xi, 0) \frac{\partial^\alpha P(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha}.$$

Здесь  $D_p(\xi, \tau) = \frac{l_0^2}{t_0} \frac{k\beta(\xi, \tau)}{m\rho_0 \mu \alpha c}$ ,  $D_T(\xi, \tau) = \frac{l_0^2}{t_0} \frac{\lambda}{c_p \rho}$ ,  $|\xi| < \infty$ ;  $\tau > 0$ ;  $0 < \alpha \leq 1$ ;  $1 < \beta \leq 2$ ;  $\tau =$

$t/t_0$ ;  $\xi = x/x_0$  – безразмерные время и координата,  $t_0, x_0$  – характерные время и масштаб,  $\Gamma(x)$  – Гамма функция Эйлера,  $\mu$  – вязкость жидкости,  $P$  – давление,  $T$  – температура,  $\rho$  – плотность,  $\lambda$  – теплопроводность,  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении,  $\alpha$  – коэффициент изотермической сжимаемости,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,

$\chi = \frac{\lambda}{c_p \rho}$  – температуропроводность.

Для решения системы уравнений (8.1) совершим преобразование Лапласа по времени и Фурье по координате:

$$\bar{\bar{P}}_{LF}(k, s) = \frac{\bar{P}_F^{\circ}(k, 0)}{s^{1-\alpha}(s^{\alpha} + \bar{D}_P^{\circ}(k))} + \frac{\beta^{\circ}}{\mathcal{D}^{\circ} s^{\alpha} + \bar{D}_P^{\circ}(k)} \frac{\bar{T}_F^{\circ}(k, 0)}{s^{1-\alpha}(s^{\alpha} + \bar{D}_T^{\circ}(k))}, \quad (8.2)$$

$$\bar{\bar{T}}_{LF}(k, s) = \frac{\bar{T}_F^{\circ}(k, 0)}{s^{1-\alpha}(s^{\alpha} + \bar{D}_T^{\circ}(k))} + \frac{\beta^{\circ}}{c_P \rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk \bar{T}_F^{\circ}(k - k', 0) \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha}(s^{\alpha} + \bar{D}_T^{\circ}(k))} \frac{\bar{P}_F^{\circ}(k', 0)}{s^{1-\alpha}(s^{\alpha} + \bar{D}_P^{\circ}(k'))}.$$

Далее совершая обратные преобразования Фурье и Лапласа, окончательно получим:

$$P(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' e^{ik(\xi - \xi')} P(\xi', 0) E_{\alpha,1}(-\bar{D}_P^{\circ}(k)\tau^{\alpha}) - \frac{\beta^{\circ}}{\mathcal{D}(d - \chi)} \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' T(\xi', 0) e^{ik(\xi - \xi')} [dE_{\alpha,1}(-\bar{D}_P^{\circ}(k)\tau^{\alpha}) - \chi E_{\alpha,1}(-\bar{D}_T^{\circ}(k)\tau^{\alpha})]$$

$$T(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' e^{ik(\xi - \xi')} T(\xi', 0) E_{\alpha,1}(-\bar{D}_T^{\circ}(k)\tau^{\alpha}) - \\ - \frac{\beta^{\circ}}{c_P \rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi''' \frac{e^{ik(\xi - \xi')} e^{ik'(\xi' - \xi''')}}{\bar{D}_T^{\circ}(k) - \bar{D}_P^{\circ}(k')} \times \\ \times T(\xi'', 0) P(\xi''', 0) \xi [ \bar{D}_P^{\circ}(k') E_{\alpha,1}(-\bar{D}_P^{\circ}(k')\tau^{\alpha}) - \bar{D}_T^{\circ}(k) E_{\alpha,1}(-\bar{D}_T^{\circ}(k)\tau^{\alpha}) ]$$

Здесь  $\bar{D}_P^{\circ}(k) = \frac{l_0^2}{t_0} \frac{k^{\beta^{\circ}}}{m\mu\mathcal{D}^{\circ}} |k|^{\beta} = d |k|^{\beta}$ ,  $\bar{D}_T^{\circ}(k) = \frac{l_0^2}{t_0} \frac{\lambda}{c_P \rho} |k|^{\beta} = \chi |k|^{\beta}$ .

При начальных значениях  $P(\xi, 0) = P_0 \delta(\xi)$ ,  $T(\xi, 0) = T_0$  (гидроразрыв), имеем:

$$P(\xi, \tau) = \frac{P_0}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \cos(k\xi) E_{\alpha,1}(-dk^{\beta} \tau^{\alpha}) - \frac{\beta^{\circ}}{\mathcal{D}^{\circ}} T_0, \quad (8.3)$$

$$T(\xi, \tau) = T_0 - \frac{\beta^{\circ}}{c_P \rho_0} \frac{P_0 T_0}{2\pi(d - \chi)} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\xi} (dE_{\alpha,1}(-d |k|^{\beta} \tau^{\alpha}) - \chi E_{\alpha,1}(-\chi |k|^{\beta} \tau^{\alpha})).$$

Отметим, что учет неизотермичности фильтрации занижает значения давления, а нелокальность по координате приводит к степенной зависимости давления.

Описание неизотермических процессов фильтрации на основе дифференциальных уравнений дробного порядка обеспечивает естественный учет пространственной и

временной нелокальности свойств материи. Использование различных значений этих параметров приводит к множеству решений, из которых можно выбрать решение точно соответствующее реальным процессам фильтрации [21].



## 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРОМЕРЗАНИЯ

Задача Стефана описывает явления тепломассопереноса в средах с фазовым переходом, сопровождающимся выделением или поглощением тепла. Большой прикладной интерес представляет обобщение задачи Стефана для сред, в которых не выполняется принцип локального равновесия, что приводит к необходимости учета особенностей теплопереноса на межфазной границе с учетом нелокальных эффектов по времени (эффект памяти) и по пространству (эффект пространственных корреляций). Одно из направлений обобщения неравновесной термодинамики связано с развитием концепции фрактала. Процессы переноса тепла в этом случае могут быть описаны на основе дифференциальных уравнений в производных дробного порядка. В связи с этим нами была поставлена задача сравнить пространственно-временные температурные поля, получающиеся при варьировании ППДП для производной по времени. В дальнейшем сопоставление с экспериментальными результатами позволит определить данный коэффициент для различных грунтов. [24]

Влажная фрактальная структура находится с некоторой постоянной температурой  $T_0$  в талом состоянии. В начальный момент времени на поверхности устанавливается температура  $T_c$ , которая ниже температуры замерзания  $T_z$ . При этом, с некоторой переменной толщиной  $\xi = f(t)$  образуется промерзший слой. Нижняя подвижная граница имеет всегда температуру замерзания  $T_z$ , а на границе происходит фазовый переход, на что требуется теплота фазового перехода  $Q_f$ . При этом верхняя граница талой зоны имеет постоянную температуру замерзания, а нижняя температуру грунта на большой глубине.

В качестве математической модели процесса промерзания во фрактальных структурах рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha T_1(x,t) &= D_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \xi(t), t > 0, \\ \partial_{0t}^\alpha T_2(x,t) &= D_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2}, & \xi(t) < x < L, t > 0, \\ T(x,0) &= T_0, \\ T(0,t) &= T_c, & \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = 0, t > 0, \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\begin{cases} T_1 = T_2 = T_3, \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = Q_f \partial_{0t}^\alpha \xi(t), \end{cases} \quad (9.2)$$

где  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\rho$  - плотность грунта,  $t = \tau / \tau_0$ ,  $x = \xi / \xi_0$  - безразмерные время и координата,  $\tau_0, \xi_0$  - характерные время и масштаб,  $D_1 = a_1 \tau_0 / \xi_0^2$ ,  $D_2 = a_2 \tau_0 / \xi_0^2$  - безразмерные коэффициенты температуропроводности,  $Q$  - количество тепла, выделяемое или поглощаемое в процессе таяния льда или замерзания воды, постоянные температуры

$$T_c < T_s < T_0, \quad \partial_{0t}^\alpha T(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{T_t'(x, s)}{(t - s)^\alpha} ds - \text{частная дробная производная Капуто.}$$

Для решения задачи (9.1)-(9.2) методом сеток вводим равномерную сетку по пространственной переменной

$$x_m = mh, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad h = \frac{L}{N},$$

и неравномерную сетку по времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad t_0 = 0, \quad t_N = t_{\text{кон}}, \quad \tau_{n+1} > 0.$$

Используя аппроксимации:

$$\partial_{0t}^\alpha T(x_m, t_n) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha) \cdot \tau_n} \sum_{k=0}^n (T_{1,m}^{k+1} - T_{1,m}^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + O(\tau), \quad (9.3)$$

и

$$\frac{\partial^2 T(x_m, t_n)}{\partial x^2} = \frac{T_{m+1}^{n+1} - 2T_m^{n+1} + T_{m-1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2), \quad (9.4)$$

и выбирая шаг по времени  $\tau_{n+1}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  таким образом, чтобы за этот временной промежуток (от  $t_n$  до  $t_{n+1}$ ) граница фазового перехода сдвинулась ровно на один шаг пространственной сетки, можно записать

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha \xi(t) &\approx \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha) \cdot \tau_{n+1}} \sum_{k=0}^n (\xi_{k+1} - \xi_k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) \approx \\ &\approx \frac{h}{\Gamma(2 - \alpha) \cdot \tau_{n+1}} \sum_{k=0}^n (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) = \frac{h \cdot t_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha) \cdot \tau_{n+1}}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Таким образом, получим следующую разностную схему

$$A_m T_{1,m-1}^{n+1} - C_m \cdot T_{1,m}^{n+1} + B_m T_{1,m+1}^{n+1} = F_m \quad (9.6)$$

$$m = 1, 2, \dots, m^* - 1, T_1 \Big|_{m=1} = T_c, T_1 \Big|_{m=m^*} = T_3,$$

где

$$A_m = B_m = \frac{D_1}{h^2}, C_m = \frac{2D_1}{h^2} + \frac{t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau_n}, \quad (9.7)$$

$$F_m = - \frac{t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau_n} T_{1,m}^n + \frac{t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau_n} \sum_{k=0}^{n-1} (T_{1,m}^{k+1} - T_{1,m}^k) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}), \quad (9.9)$$

и

$$A_m T_{1,m-1}^{n+1} - C_m \cdot T_{2,m}^{n+1} + B_m T_{2,m+1}^{n+1} = F_m,$$

(9.9)

$$m = m^* + 1, \dots, M - 1, T_2 \Big|_{m=m^*} = T_3, \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{m=M} = 0,$$

где

$$A_m = B_m = \frac{D_2}{h^2}, C_m = \frac{2D_2}{h^2} + \frac{t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau_n}, \quad (9.10)$$

$$F_m = - \frac{t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau_n} T_{2,m}^n + \frac{t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau_n} \sum_{k=0}^{n-1} (T_{2,m}^{k+1} - T_{2,m}^k) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}). \quad (9.11)$$

Проведем дискретизацию граничного условия в случае  $x = \xi(t)$

$$\lambda_1 \frac{T_{1,m^*} - T_{1,m^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,m^*+1} - T_{2,m^*}}{h} = Q_f \frac{h \cdot t_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_{n+1}},$$

т.е.

$$\lambda_1 \frac{T_3 - T_{1,m^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,m^*+1} - T_3}{h} = Q_f \frac{h \cdot t_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau_{n+1}}.$$

Таким образом,

$$\tau_{n+1} = \frac{Q_f h^2 \cdot t_n^{1-\alpha}}{(\lambda_1 (T_3 - T_{m^*-1}) - \lambda_2 (T_{2,m^*+1} - T_3)) \cdot \Gamma(2-\alpha)}.$$

(9.12)

Шаг по времени зависит от температуры. Поэтому поле температуры можно определить методом простой итерации.

Решение систем (9.6) и (9.9), где коэффициенты определяются согласно равенствам (9.7), (9.8) и (9.10), (9.10) на каждом временном слое может быть найдено методом прогонки в виде

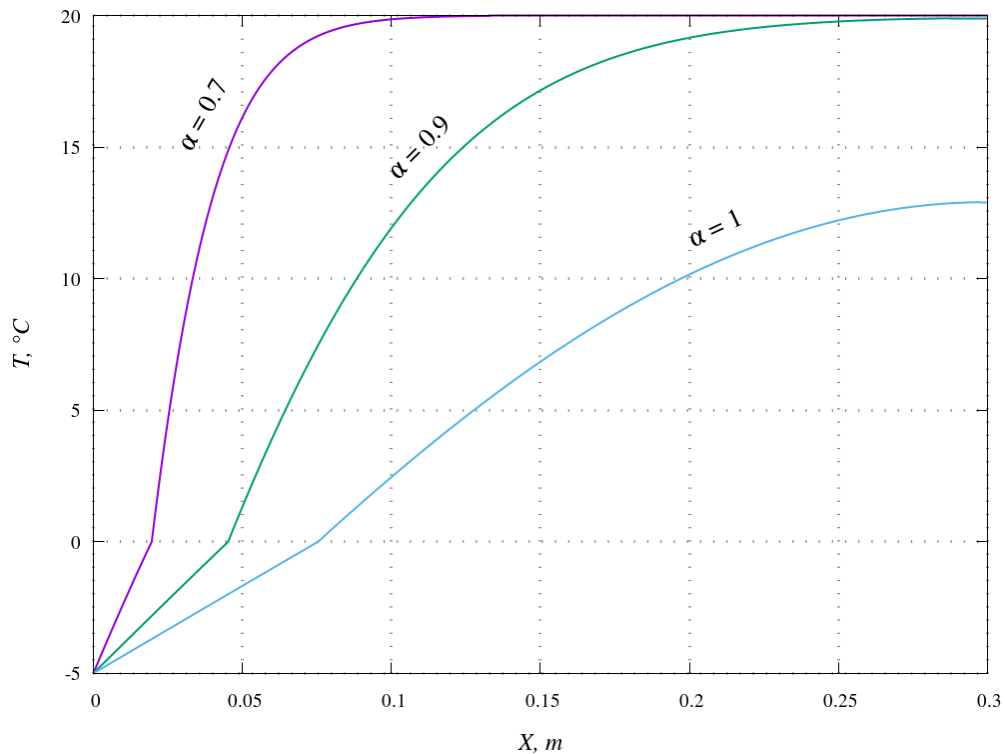
$$T_m = Q_{m+1} T_{m+1} + D_{m+1}, \quad m = M - 1, M - 2, \dots, 0, \quad (9.13)$$

где

$$Q_{m+1} = \frac{B_m}{C_m - Q_m A_m}, \quad D_{m+1} = \frac{A_m C_m - F_m}{C_m - Q_m A_m}, \quad m = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (9.14)$$

Для анализа полученного решения возьмём начальные условия, типичные для зимнего промерзания и табличные значения:  $\lambda_1 = 2,7$  Вт/(м·К),  $\rho_1 = 917 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_1 = 2090 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $\lambda_2 = 0,6$  Вт/(м·К),  $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_2 = 4220 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , характерные температуры  $T_0 = 293 \text{ К}$ ,  $T_3 = 273 \text{ К}$ ,  $T_c = 268 \text{ К}$ , теплота фазового перехода  $Q_\phi = 3,32 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ , влажность грунта  $w = 1 \text{ кг/кг}$ , глубина грунта  $L = 0,3$  м.

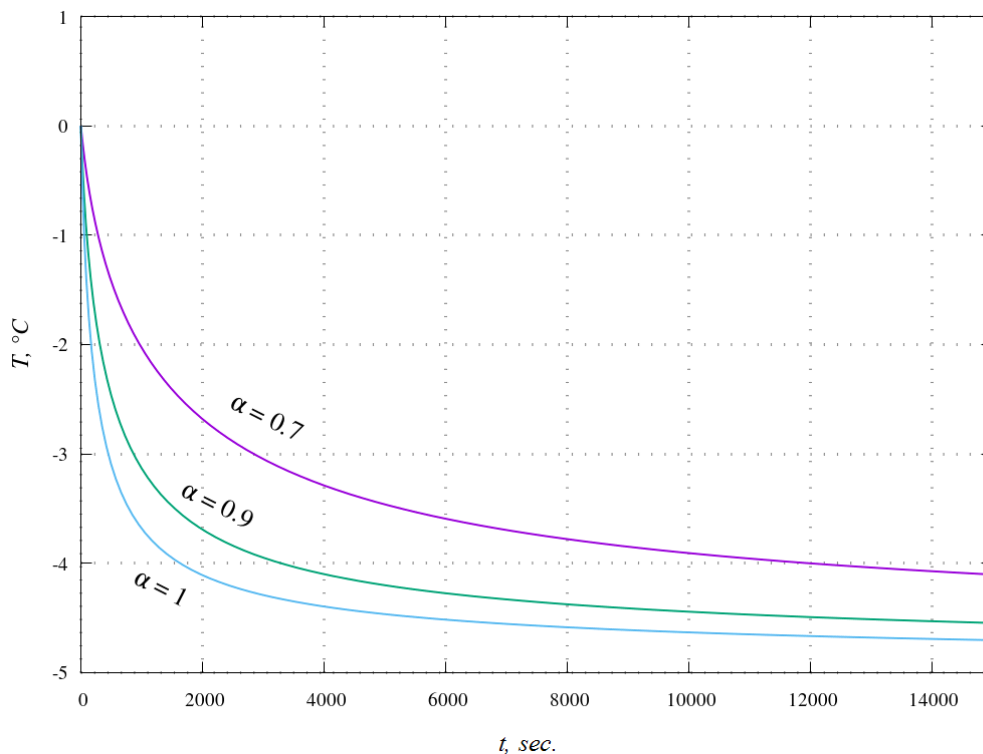
Рисунок 9.1 демонстрирует графики численного решения задачи при различных значениях параметра  $\alpha$  и в произвольно выбранный момент времени  $t = 130000$  с. Как видно из рисунка в точке замерзания ( $0^\circ \text{C}$ ) температурная зависимость претерпевает излом, причем с уменьшением ППДП точка замерзания лежит ближе к поверхности.



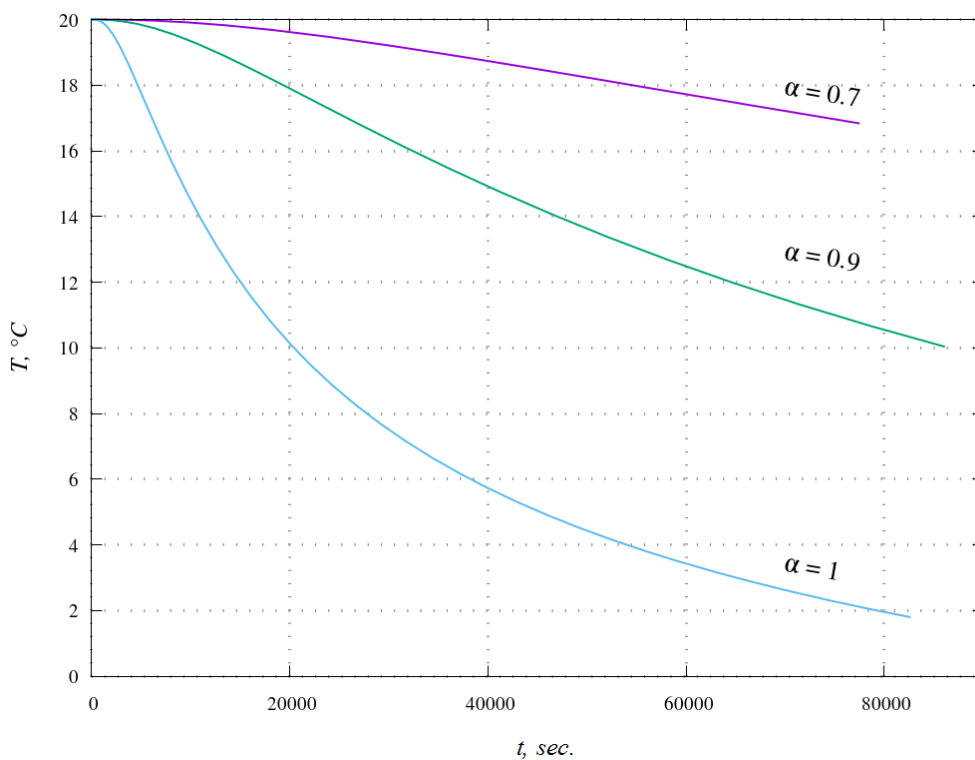
**Рис. 9.1.** Графики численного решения задачи (9.1), (9.2) для различных ППДП в момент времени  $t = 130000$  с.

Рисунки 9.2 и 9.3 демонстрируют зависимости температуры от времени на глубинах 0.0015 м и 0.075 м для различных ППДП. Как видно из рисунков, промерзание на глубине 0.0015 м происходит практически сразу, в то же время на глубине 0.075 м при любом ППДП температура достаточно долго держится выше точки замерзания. В обоих

случаях даже незначительное уменьшение ППДП приводит к существенному замедлению скорости охлаждения, что характерно средам с фрактальной структурой.



**Рис. 9.2.** Графики зависимости температуры от времени на глубине 0.0015 м в различные моменты времени для различных ППДП и температуре  $T_c = -5^\circ\text{C}$ .



**Рис. 9.3.** Графики зависимости температуры от времени на глубине 0.075 м для различных ППДП и температуре  $T_c = -5^{\circ} \text{Ñ}$ .

Данные для  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 0.9$  соответствуют функциональной зависимости  $\xi(t) \approx 0.00015 \cdot t^{1/2}$  и  $\xi(t) \approx 0.0002 \cdot t^{0.45}$  соответственно. Таким образом, фазовую границу можно задать функциональной зависимостью  $\xi(t) \approx \sigma(\alpha) \cdot t^{\alpha/2}$ , где  $0 < \alpha \leq 1$ .

Для скорости движения межфазной границы согласно обобщенному условию Стефана получим следующее выражение

$$V_{\Gamma} = \partial_{0t}^{\alpha} \xi(t) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\xi'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds = \frac{\sigma(\alpha) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot t^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, скорость движения фазовой границы является функцией зависящей от времени и параметра производной дробного порядка. Фазовая скорость  $V_{\Gamma} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенность предлагаемого обобщения равновесной термодинамики на основе ДИ заключается в наличии дополнительного параметра – ППДП по ТП, которая позволяет теоретически рассчитать значения ТХ на основе полученного уравнения состояния.

Исходя из выражения для статистической суммы, можно вывести ОУС и получить аналитические выражения для ТХ вещества. На основе экспериментально измеренных значений  $P, V, T$  и полученного «фрактального» уравнения состояния (ФУС) можно определить значение ППДП по ТП и далее рассчитать ТХ на основе полученных аналитических выражений. Как показывают проведенные нами расчеты, результаты удовлетворительно соответствуют экспериментально измеренным данным.

Отметим, что переход к производным дробного порядка в действительности не формальный переход. В настоящее время нет ясного физического смысла ППДП по ТП, что требует проведения дальнейших фундаментальных исследований. Ниже приведем возможную интерпретацию перехода к производным дробного порядка. Переход от обычных производных к производным дробного порядка представляет собой один из способов учета принципа локального неравновесия, когда в термодинамический процесс дают существенный вклад флуктуации ТП, т.е. не выполняется распределение Больцмана–Гиббса. Действительно, как видно из определения производной дробного порядка в термодинамический процесс дают вклад состояния с различными значениями термодинамического параметра, по которым осуществляется операции дробного дифференцирования. Прямого доказательства появления производных дробного порядка по ТП при учете нелокальности интеграла столкновений по времени и импульсов в настоящее время нет. Заметим, еще раз, что появление степенных распределений свидетельствуют о важной роли флуктуаций в термодинамическом процессе и переход к производным дробного порядка представляется как способ учета вклада этих флуктуаций в термодинамический процесс. Таким образом, по своему физическому смыслу переход к производным дробного порядка по термодинамическим параметрам представляет собой способ учета принципа локального неравновесия, когда термодинамический процесс происходит в условиях больших флуктуаций. Т.е. переход от одного равновесного состояния в другое происходит не через множество равновесных состояний системы, а вклад дают флуктуации и неравновесные состояния, которые не успевают полностью релаксироваться к равновесному состоянию. Мерой учета флуктуаций становится ППДП.

Основные результаты выполнения темы к 2017 г. могут быть охарактеризованы как:

1. Дано обобщение равновесной и неравновесной термодинамики на основе дробного исчисления.

2. Используя обобщение термодинамики в формализме производных дробного порядка, получено однопараметрическое «фрактальное» уравнение состояния, на основе которого в широком диапазоне температур и давлений рассчитаны теплофизические свойства инертных газов (неона и аргона), воды (включая линию насыщения) и фреона R409B.

3. На основе экспериментальных измерений, проведенных стационарным методом, получены данные о влиянии температуры и гидростатического давления на теплопроводность образцов песчаника и керамики..

4. Исследована задача Стефана в обобщении для фрактальных сред с применением аппарата производных дробного порядка в смысле Капуто по времени. Построена разностная схема. Разработан алгоритм и создана программа численного решения с оператором дробного дифференцирования. Оценены функциональные зависимости движения межфазной границы для обобщенного условия Стефана от значения показателя производной дробного порядка (ППДП).

5. Исследована задача неизотермической фильтрации с учетом нелокальных эффектов по времени и координате для случая гидроразрыва.

Существенная часть данных результатов по всем пяти пунктам была получена и представлена к публикации в 2017 году.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Н.Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
2. Т. Хилл. Статистическая механика. М.: ИЛ. 1960. 486 с.
3. С.Л. Соболев, Локально-неравновесные процессы переноса//Успехи физических наук. 1997. Т. 167, №10. С.1095–1106.
4. S. Abe and Y. Ohamoto, Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications//Series lecture Notes in Physics. Berlin, New York, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 277 p.
5. Р.Г. Зарипов, Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Издательство «Фэн». Казань. 2002. 250 с.
6. M. Sugiyama, Nonadditive Entropy and Nonextensive Statistical Mechanics//Continuum Mechanics and Thermodynamics. Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.V.16. P. 221-304.
7. А.Д. Суханов, К квантовому обобщению равновесной статистической термодинамики//Теоретическая и математическая физика. 2008.Т 135, №1, С. 183–196.
8. Б. Мандельброт, Фрактальная геометрия природы. Москва. Институт компьютерных исследований, 2002, 656 с.
9. R.A. Magomedov, R.R. Meilanov, E.N. Akhmedov, V.D. Beybalaev, A.A. Aliverdiev, Generalization of thermodynamics in fractional order derivatives and calculation of heat-transfer properties of noble gases // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 2018 **(accepted)** doi: 10.1007/s10973-018-7024-2
10. Z.Z. Alisultanov, R.P. Meilanov, L.S. Paixão, M.S. Reis, Oscillating magnetocaloric effect in quantum nanoribbons // Physica E Low-dimensional Systems and Nanostructures **65** (2015) 44-50, doi:10.1016/j.physe.2014.08.012
11. R.P. Meilanov, M.R. Shabanova, E.N. Akhmedov, Some peculiarities of the solution of the heat conduction equation in fractional calculus // Chaos, Solitons & Fractals **75** (2015) 29-33, doi:10.1016/j.chaos.2015.01.024
12. V.D. Beibalaev, M.R. Shabanova, A finite-difference scheme for solution a fractional heat diffusion-wave equation conditions// Thermal science, **19** (2) (2015) 531-536 doi:10.2298/TSCI120418148B
13. Z.Z. Alisultanov, R.P. Meilanov, Transport properties of epitaxial graphene formed on the surface of a superconductor // Semiconductors **48** (7) (2014) 924-934 doi:10.1134/S1063782614070021 (З.З. Алисултанов, Р.П. Мейланов, Транспортные свойства эпитаксиального графена, сформированного на поверхности полупроводника // Физика и техника полупроводников **48** (7) (2014) 951-962)

14. Z.Z. Alisultanov, R.P. Meilanov Electron heat conductivity of epitaxial graphene on silicon carbide // Technical Physics Letters. 2016. Т. 42. № 8. С. 779-782, doi: 10.1134/S1063785016080022 (З. Алисултанов, Р.П. Мейланов, Электронная теплопроводность эпитаксиального графена на карбиде кремния // Письма в Журнал технической физики. 2016. Т. 42. № 15. С. 19-26)
15. Z.Z. Alisultanov, R.P. Meilanov, N.K. Nukhov, On the role of lattice defects in the formation of adsorption properties of graphene // Technical Physics Letters, 2013, Volume 39, Issue 2, pp 171–174 (З.З. Алисултанов, Р.П. Мейланов, А.К. Нухов, О роли дефектов кристаллической решетки в формировании адсорбционных свойств графена, Письма в Журнал Технической Физики, 2013, 39(3), 63)
16. M.R. Shabanova, Determination of thermal diffusivity and nonlocalization parameters from experimental data // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2013. Т. 86. № 2. С. 467-470 (М.Р. Шабанова, Определение коэффициента температуропроводности и параметров нелокальности по экспериментальным данным // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86. № 2. С. 439-442)
17. Z.Z. Alisultanov, R.P. Meilanov, On the theory describing graphene in an anomalous-dispersion region // Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques. 2013. Т. 7. № 1. С. 46-50. (З.З. Алисултанов, Р.П. Мейланов, К теории описания графена в области аномальной дисперсии // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. № 1. С. 50.)
18. M.R. Shabanova, R.P. Meilanov, R.R. Meilanov, E.N. Akhmedov, Determining the thermal diffusivity of sediments using the fractional nonlocal heat conduction equation // Izvestiya Physics of the Solid Earth 51(1) (2015) 80-86, doi:10.1134/S106935131405005X (М.Р. Шабанова, Р.П. Мейланов, Р.Р. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, Определение коэффициента температуропроводности осадочных пород на основе нелокального уравнения теплопроводности в дробном исчислении // Физика земли, № 1 (2015) 83-89)
19. R.A. Magomedov, R.R. Meilanov, R.P. Meilanov, E.N. Akhmedov, V.D. Beybalaev, A.A. Aliverdiev, To the fractal equation of state // Journal of Physics: Conference Series, 2017, **891**, 012331 doi:10.1088/1742-6596/891/1/012331
20. S.N. Emirov, V.D. Beybalaev, G.G. Gadzhiev, A.E. Ramazanov, A.A. Amirova, and A.A. Aliverdiev, To the description of the temperature and pressure dependences of the thermal conductivity of sandstone and ceramics // 2017, **891**, 012335 doi :10.1088/1742-6596/891/1/012335

21. R.R Meilanov, E.N. Akhmedov, V.D. Beybalaev, R.A. Magomedov, G.B. Ragimkhanov, A.A. Aliverdiev, To the theory of non-local non-isothermal filtration in porous medium // J. Phys.: Conf. Ser., 2018, **946**, 012076, doi: 10.1088/1742-6596/946/1/012076
22. R.A. Magomedov, R.P. Meilanov, E.N. Akhmedov and A.A. Aliverdiev, Calculation of multicomponent compound properties using generalization of thermodynamics in derivatives of fractional order // Journal of Physics: Conference Series, 2016, **774**, 012025 (doi:10.1088/1742-6596/774/1/012025)
23. R.P. Meilanov, R.A. Magomedov, Thermodynamics in Fractional Calculus // Journal of Engineering Physics and Thermophysics **87**(6) (2014) 1521-1531, doi:10.1007/s10891-014-1158-2 (Р.П. Мейланов, Р.А. Магомедов, Термодинамика в дробном исчислении // Инженерно-физический журнал **87**(6) (2014) 1455-1465)
24. В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, Р.А. Магомедов, Р.Р. Мейланов, Э.Н. Ахмедов Моделирование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с операторами дробного дифференцирования // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, 2017. Т. 21, № 2. С. 376-387. doi: 10.14498/vsgtu1492
25. С.Н. Эмиров, В.Д. Бейбалаев, А.Э. Рамазанова, Г.Г. Гаджиев, А.А. Амирова, А.А. Аливердиев. О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности горных пород // Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого, №5(103) , 2017, 52-66.
26. З.З. Алисултанов, Р.П. Мейланов, Г.М. Мусаев, А.Х. Халилова, Слабо фрактальный квантовый осциллятор // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2014. № 6. С. 12-18.
27. Р.А. Магомедов, Р.Р. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев Фрактальное уравнение состояния и расчет теплофизических характеристик аргона // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки, **32**, No. 1, 2017, 6-11, doi: 10.21779/2542-0321-2017-32-1-6-11
28. Р.А. Магомедов, Р.Р. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев Фрактальное уравнение состояния и расчет теплофизических характеристик воды // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки, **32**. No. 4. 2017, 63-69 doi: 10.21779/2542-0321-2017-32-4-63-69
29. Р.А. Магомедов, Р.П. Мейланов, Расчет энтропии и теплоемкости аргона // В сборнике: Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко . 2013. С. 188-191.

30. М.Р. Шабанова, Э.Н. Ахмедов, Р.П. Мейланов, Интерпретация распределения температуры осадочных пород на основе уравнения теплопроводности в производных дробного порядка // В сборнике: Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко . 2013. С. 277-283.
31. Р.А. Магомедов, Р.П. Мейланов, Расчет энтропии и теплоемкости аргона // В сборнике: Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко . 2013. С. 188-191.
32. Р.П. Мейланов, А.А. Пирилаев, Численные методы решения нелинейного уравнения теплопроводности в производных дробного порядка // Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко . 2013. С. 350-353.
33. Р.П. Мейланов, М.Р. Шабанова, Концепция фрактала и дробное исчисление // В сборнике: Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко . 2013. С. 77-83.
34. Р.П. Мейланов, М.Р. Шабанова, Особенности неизотермической фильтрации с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций // В сборнике: Возобновляемая энергетика: Проблемы и перспективы Материалы Научной сессии Института проблем геотермии, посвященной Дню российской науки. Редакционно-издательский совет: д.т.н. Алхасов А.Б., д.т.н. Алишаев М.Г., д.т.н. Базаев А.Р., к.х.н. Каймаразов А.Г., д.т.н. Кобзаренко Д.Н., д.ф.-м.н. Мейланов Р.П., д.ф.-м.н. Рамазанов М.М.. 2014. С. 96-99.
35. Мейланов Р.П., Магомедов Р.А. Расчет теплофизических параметров хладагента R409b на основе фрактального уравнения состояния // В сборнике: Возобновляемая энергетика: Проблемы и перспективы Материалы Научной сессии Института проблем геотермии, посвященной Дню российской науки. Редакционно-издательский совет: д.т.н. Алхасов А.Б., д.т.н. Алишаев М.Г., д.т.н. Базаев А.Р., к.х.н. Каймаразов А.Г., д.т.н. Кобзаренко Д.Н., д.ф.-м.н. Мейланов Р.П., д.ф.-м.н. Рамазанов М.М.. 2014. С. 111-114.
36. Э.Н. Ахмедов, Р.П. Мейланов, Особенности решения задачи коши для нелокальной неизотермической фильтрации в дробном исчислении // В сборнике: Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы. Актуальные проблемы

- освоения возобновляемых энергоресурсов Материалы III международной конференции и VII Школы молодых ученых имени Э.Э. Шпильрайна, Махачкала, 6-8 октября 2014 г. редколлегия: А.Б. Алхасов, А.Г. Каймаразов, Д.Н. Кобзаренко, Р.П. Мейланов, М.М. Рамазанов. 2014. С. 144-147.
37. Р.П. Мейланов, Физические аспекты дробного исчисления. // Вып.4. Материалы III международной конференции «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы» и VII Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э.Шпильрайна. 6-8 октября 2014 г. / Под ред. д.т.н. А.Б.Алхасова. - Махачкала: ИП Овчинников (АЛЕФ), 2014г. С.27-31.
38. Р.П. Мейланов, Термодинамика в дробном исчислении и его приложения к задачам геотермии // Труды IV Международной конференции «Возобновляемая энергетика. Проблемы и перспективы», посвященной 35-летию Института проблем геотермии ДНЦ РАН. Махачкала. Выпуск 5, Т. 1. 2015. С. 48-63.
39. Р.А. Магомедов, Фрактальное уравнение состояния и расчет теплофизических характеристик сложных веществ. // Труды IV Международной конференции «Возобновляемая энергетика. Проблемы и перспективы», посвященной 35-летию Института проблем геотермии ДНЦ РАН. Махачкала. Выпуск 5, Т. 1. 2015. С. 310-313.
40. Э.Н. Ахмедов, Р.Р. Мейланов Особенности распределения температуры и давления в пласте при нелокальной неизотермической фильтрации // Труды IV Международной конференции «Возобновляемая энергетика. Проблемы и перспективы», посвященной 35-летию Института проблем геотермии ДНЦ РАН. Махачкала. Выпуск 5, Т. 1. 2015. С. 314-218.
41. Магомедов Р.А., Ахмедов Э. Н., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Определение теплофизических свойств одноатомных газов // Материалы Всероссийской научно-технической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики, информатики и современной науки: теория и практика актуальных исследований», посвященной 80-летию профессора Магомедова К. М., Махачкала, 2016, С. 157-159
42. Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Ахмедов Э. Н., Мейланов Р.Р., Магомедов Р.А., Численное исследование процессов теплообмена во фрактальных средах за счет конвекции и излучения на границе// Материалы Всероссийской научно-технической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики, информатики и современной науки: теория и практика актуальных

- исследований», посвященной 80-летию профессора Магомедова К. М., Махачкала, 2016, С. 67-71.
43. Р.А. Магомедов, Р.Р. Мейланов, Р.П. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, К выводу фрактального уравнения состояния многокомпонентных систем // Материалы тезисов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики» и XIV Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа информатики», Терскол 17 – 21 октября 2016 г., С. 186-188
44. М.А. Назаралиев, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, Э.Н. Ахмедов, Р.Р. Мейланов, Магомедов Р.А., Численное решение краевой задачи для системы уравнений нелокальной неизотермической фильтрации // Материалы тезисов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики» и XIV Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа информатики», Терскол 17 – 21 октября 2016 г., С. 218-221.
45. R.A. Magomedov, R.P. Meilanov, E.N. Akhmedov and A.A. Aliverdiev, About application of derivatives of fractional order to taking into account the principle of local disequilibrium // Book of Abstracts of XXXI International Conference on Equations of State for Matter. March 1-6, 2016. Elbrus, Moscow & Chernogolovka & Nalchik, 2016, P. 85, ISBN 978-5-7558-0567-4
46. А.А. Аливердиев, Э.Н. Ахмедов, В.Д. Бейбалаев, Р.А. Магомедов, Р.П. Мейланов, Р.Р. Мейланов, К анализу термодинамических характеристик на основе фрактального уравнения состояния // Тезисы докладов XIII Международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (пос. Дивноморское, 7-14 сентября 2016 г.), Владикавказ 2016, с. 47-48
47. Аливердиев А.А., Бейбалаев В.Д., Мейланов Р.Р., Назаралиев М.А., Обобщенный нелинейный осциллятор Дуффинга // Тезисы докладов XIII Международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (пос. Дивноморское, 7-14 сентября 2016 г.), Владикавказ 2016, с. 141-142
48. Р.А. Магомедов, Р.Р. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, К расчету термодинамических характеристик на основе фрактального уравнения состояния на примере водяного пара Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Кабардино-Балкарская Республика, Терскол, 17 – 21 мая 2017 г., стр. 136-137.

49. Р.А. Магомедов, Р.Р. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, Расчет теплофизических характеристик воды в дробном исчислении // Материалы V Международной конференции "Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы" 23-26 октября 2017 г., Т.1, стр. 305-307.
50. Р.А. Магомедов, Р.Р. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, К расчету термодинамических характеристик воды на основе фрактального уравнения состояния // Материалы XII Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченная к 85-летию профессора М.Г. Алишаева, стр. 155-156.
51. Р.А. Магомедов, Р.Р. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, К фрактальному уравнению состояния, Материалы Международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетики», Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, 9-11 октября 2017 г., ISBN 978-5-383-01233-8 (Том 2), стр. 316-318.
52. С.Н. Эмиров, В.Д. Бейбалаев, Г.Г. Гаджиев, А.А. Амирова, А.А. Аливердиев, Температурные и барические закономерности изменения теплопроводности песчаника и керамики // Сборник докладов Седьмой Международной научной конференции “Химическая термодинамика и кинетика” 29 мая – 2 июня 2017, Великий Новгород, стр. 364-365.
53. С.Н. Эмиров, В.Д. Бейбалаев, А.Э. Рамазанова, И.А. Давудов, А.А. Амирова, А.А. Аливердиев, О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности композитных материалов // Материалы XX Междисциплинарный, Международный Симпозиум “Упорядочение в минералах и сплавах”, ОМА-20, 10-15 сентября 2017г., Ростов-на-Дону – п. Южный, с. 276-279.
54. В.Д. Бейбалаев, С.Н. Эмиров, А.А. Аливердиев, А.А. Амирова, Г.Г. Гаджиев, К описанию температурной и барической зависимости теплопроводности мергеля // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Кабардино-Балкарская Республика, Терскол, 17 – 21 мая 2017 г., стр. 46-47.
55. С.Н. Эмиров, В.Д. Бейбалаев, А.Э. Рамазанова, А.А. Амирова, О.И. Ибрагимов, А.А. Аливердиев, Тепловые свойства минерального вещества в термобарических условиях литосферы // Материалы V Международной конференции "Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы" 23-26 октября 2017 г., Т. 2, стр. 152-155.

56. С.Н. Эмиров, В.Д. Бейбалаев, А.Э. Рамазанова, И.А. Давудов, А.А. Амирова, А.А. Аливердиев, К описанию температурной и барической зависимости теплопроводности керамики и песчаника, Материалы Международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетики», Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, 9-11 октября 2017 г., ISBN 978-5-383-01233-8 (Том 2), с. 334-335.
57. С.Н. Эмиров, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, А.А. Амирова, Г.Г. Галжиев, А.Э. Рамазанова, Ф.Ф. Малиева. Расчет теплопроводности песчаника в зависимости от давления// Материалы XII Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченная к 85-летию профессора М.Г. Алишаева, стр. 230-232.
58. А.А. Аливердиев, Р.А. Магомедов, Р.Р. Мейланов, Э.Н. Ахмедов, Расчет термодинамических характеристик на основе фрактального уравнения состояния на примере воды // Сборник докладов Седьмой Международной научной конференции “Химическая термодинамика и кинетика” 29 мая –2 июня 2017, Великий Новгород, стр. 7-10.
59. R.A. Magomedov, R.R. Meilanov, E.N. Akhmedov, V.D. Beybalaev, A.A. Aliverdiev, EOS calculation for Ar and water with the application of fractional order derivatives // Abstracts of XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter March 1-6, 2017, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, Section 3. Equations of State for Matter, P. 83.
60. R.A. Magomedov, R.R. Meilanov, E.N. Akhmedov, V.D. Beybalaev, A.A. Aliverdiev, About the generalization of thermodynamics in fractional order derivatives // Abstracts of XXI International Conference on Chemical Thermodynamics in Russia (RCCT 2017) and School Conference on Chemical Thermodynamics for Young Scientists, June 26-30, 2017, Akademgorodok, Novosibirsk, Russia (2017) P.85.
61. В.Д. Бейбалаев, М.А. Назаралиев, А.А. Аливердиев, Ф.Ф. Малиева, О численном исследовании краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с дробными производными // Материалы V Международной конференции "Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы" 23-26 октября 2017 г., Т.1, стр. 263-265.
62. Р.Б. Арсланбекова, И.О. Омаров, В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев, Об особенностях в фазовой плоскости обобщенной нелинейной системы Дуффинга // Материалы Международного симпозиума «Неравновесные процессы в сплошных средах», Том 1, Пермь 2017, стр. 38-41



63. R.R. Meilanov, E.N. Akhmedov, V.D. Beybalaev, G.B. Ragimkhanov, R.A. Magomedov, R.P. Meilanov, A.A. Aliverdiev, Application of fractional calculus for local non-isothermal filtration // Abstracts of XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter March 1-6, 2017, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, Section 2. Shock Waves, Detonation and Combustion, 127.
64. A.A. Aliverdiev, R.P. Meilanov, R.R. Meilanov, V.D. Beybalaev, R.A. Magomedov, M.-Sh.A. Nazaraliev, E.N. Akhmedov, About the application of fractional calculus to the nonequilibrium process dynamics // Proc. of TMB-2017 (Turbulent Mixing and Beyond, Sixth International Conferenceб Tenth Anniversary Program), Abstracts, 14 - 18 August, 2017, the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Strada Costiera 11, Trieste, Italy, p. 77
65. A.A. Aliverdiev, D. Batani, A.A. Amirova, R. Benocci, R. Dezulian, E. Krousky, M. Pfeifer, J. Ullschmied, J. Skala, K. Jakubowska, About laser shocks dynamics for complex spot and structured targets // Abstracts of XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter March 1-6, 2017, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, Section 1. Power Interaction with Matter, 36
66. А.М. Нахушев Дробное исчисление и его применение. М. Физматлит. 2003. 272 с.
67. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 568 с.
68. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука. 1981. 800 с.
69. Р.П. Мейланов, Обобщенное уравнение одномерной фильтрации с дифференцированием дробного порядка. *Инженерно-физический журнал*. 2001. Т.74. № 2. С. 34-37.
70. Теплофизические свойства технически важных газов при высоких температурах и давлениях: Справочник // Зубарев В. Н., Козлов А. Д., Кузнецов В.М. и др. – М.: Энергоатомиздат, 1989. 232 с.
71. Dobbins R.A., Mohammed K., Sullivan D.A.//J. Phys. Chem. Ref. Data. 1988. V.17, №1. P 1.
72. Физические величины: Справочник // Григорьев И. С., Мелихов Е. З. – М.: Энергоатомиздат, 1991. 316 с.
73. Д. Эйзенберг, В. Кауцман, Структура и свойства воды. // Перевод с англ. Под редакцией Богородского В. В. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. 280 с.
74. М.П. Вукалович, Теплофизические свойства воды и водяного пара. – М.: Машиностроение, 1967. 160 с.

75. В.П. Глушко, Термодинамические свойства индивидуальных веществ.  
//Справочник. Москва: Наука. 1978.
76. программа расчета данных REFPROP Национального института стандартов и технологий США

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычисляя производную дробного порядка от первой слагаемой, используя при этом интеграл [68]

$$\int_0^a \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{(a^\mu - x^\mu)^{1-\beta}} dx = a^{\alpha+\mu(\beta-1)} B(\beta, \alpha/\mu) [\mu \ln a + \psi(\alpha/\mu) - \psi(\beta + \alpha/\mu)]; a, \mu, \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0; \operatorname{Re} \beta > -1 \text{ при } a > 0$$

где  $B(x, y)$  – бета-функция Эйлера,  $\Psi(x)$  – пси-функция, получим

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + (1 - \alpha) \left[ \ln \left( \frac{eV}{N} \left[ \frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi \hbar^2} \right]^{3/2} \right) \right] \right\} + kT \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial V^\alpha} \left[ \ln \left( 1 - \frac{A(T)}{V} \right) \right]$$

где  $A(T) = N(\sum_{i=1}^3 x_i B_i + \sum_{i<j=1}^3 x_{ij} B_{ij})$

Для расчета производной дробного порядка во втором слагаемом заметим, что параметр  $\frac{A(T)}{V} \ll 1$ . Поэтому воспользуемся тем, что когда  $\frac{A(T)}{V} \ll 1$  с точностью до

линейных членов по параметру  $\frac{A(T)}{V}$  можно заменить  $\ln \left( 1 - \frac{A(T)}{V} \right) \approx -\ln \left( 1 + \frac{A(T)}{V} \right)$ .

По определению производной дробного порядка имеем

$$I(V, T) = \frac{\partial^\alpha}{\partial V^\alpha} \left[ \ln \left( 1 + \frac{A(T)}{V} \right) \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial V} \int_0^V \frac{\ln \left( 1 + \frac{A(T)}{y} \right)}{(V-y)^\alpha} dy$$

Перейдя к переменной  $x = A/y$ , получим

$$I(V, T) = \frac{A(T)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial V} \int_{A/V}^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^2 (V-A/x)^\alpha} dx = \frac{A(T)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{1}{V^\alpha} \int_{A/V}^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{2-\alpha} \left(x - \frac{A}{V}\right)^\alpha} dx \right)$$

Перейдя, далее к переменной  $z = x - A/V$  получим

$$I(V, T) = \frac{A(T)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{1}{V^\alpha} \int_0^\infty \frac{z^{1-\alpha-1} \ln \left( 1 + \frac{A}{V} + z \right)}{(z+A/V)^{2-\alpha}} dz \right)$$

Для расчета интеграла воспользуемся результатом [22]

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \ln(x+b)}{(x+a)^{\rho}} dx = a^{\alpha-\rho} B(\alpha, \rho - \alpha) [\ln b + \psi(\rho) - \psi(\rho - \alpha) - \frac{\alpha}{\rho} (1 - ab^{-1}) {}_3F_2(\alpha + 1, 1, 1; 2, \rho + 1; 1 - ab^{-1})]$$

где  ${}_3F_2(a, b, c; d, e; z)$  – гипергеометрический ряд.

В результате имеем

$$I(V, T) = \frac{A(T)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial V} \left\{ \frac{V^{1-\alpha} \Gamma(1-\alpha)}{A \Gamma(2-\alpha)} \left[ \ln \left( 1 + \frac{A}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) - \frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)} \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-1} {}_3F_2(2 - \alpha, 1, 1; 3 - \alpha, 1; \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-1}) \right] \right\}$$

или

$$I(V, T) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial}{\partial V} \left\{ V^{1-\alpha} \left[ \ln \left( 1 + \frac{A}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) - \frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)} \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-1} {}_3F_2(2 - \alpha, 1, 1; 3 - \alpha, 1; \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-1}) \right] \right\}$$

Таким образом, уравнение состояния принимает вид

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + (1 - \alpha) \left[ \ln \left( \frac{eV}{N} \left[ \frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi \hbar^2} \right]^{3/2} \right) \right] \right\} - \frac{kT}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial}{\partial V} \left\{ V^{1-\alpha} \left[ \ln \left( 1 + \frac{A}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) - \frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)} \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-1} {}_3F_2(2 - \alpha, 1, 1; 3 - \alpha, 1; \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-1}) \right] \right\}$$

Исходя из определения гипергеометрической функции

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \frac{\Gamma(b_1) \dots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1+n) \dots \Gamma(a_p+n)}{\Gamma(b_1+n) \dots \Gamma(b_q+n)} \frac{z^n}{n!}$$

Получим

$${}_3F_2\left(2 - \alpha, 1, 1; 3 - \alpha, 1; \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-1}\right) = \frac{\Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\alpha+n) \Gamma(1+n) \Gamma(1+n)}{\Gamma(3-\alpha+n) \Gamma(2+n)} \frac{\left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-n}}{n!}$$

Далее имеем

$${}_3F_2\left(2 - \alpha, 1, 1; 3 - \alpha, 1; \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-1}\right) = \frac{\Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\alpha+n)}{\Gamma(3-\alpha+n)(n+1)} \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-n}$$

или

$${}_3F_2\left(2 - \alpha, 1, 1; 3 - \alpha, 1; \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-1}\right) = (2 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2-\alpha)(n+1)} \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-n}$$

Таким образом, уравнение состояния принимает вид

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + (1 - \alpha) \left[ \ln \left( \frac{\varepsilon V}{N} \left[ \frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi \hbar^2} \right]^{3/2} \right) \right] \right\} - \frac{kT}{V^{1-\alpha}} \left\{ V^{1-\alpha} \left[ \ln \left( 1 + \frac{A}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) - (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2-\alpha)(n+1)} \left( 1 + \frac{A}{V} \right)^{-n-1} \right] \right\}$$

Вычисляя производную, получим

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + (1 - \alpha) \left[ \ln \left( \frac{\varepsilon V}{N} \left[ \frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi \hbar^2} \right]^{3/2} \right) \right] \right\} + \frac{kT}{V} \left\{ \frac{\frac{A}{V}}{1+\frac{A}{V}} - (1 - \alpha) \left[ \ln \left( 1 + \frac{A}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) + \frac{\frac{A}{V}}{\left(1+\frac{A}{V}\right)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{A}{V}\right)^{-n}}{n+1} + \frac{1}{\left(1+\frac{A}{V}\right)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{A}{V}\right)^{-n}}{(n+2-\alpha)(n+1)} - \alpha \frac{\frac{A}{V}}{\left(1+\frac{A}{V}\right)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\left(1+\frac{A}{V}\right)^{-n}}{(n+2-\alpha)(n+1)} \right] \right\}$$

Отметим, что входящие сюда ряды сходятся в силу малости параметра  $\left[ 1 + \frac{A}{V} \right]^{-1}$  и

ограничимся линейными по малому параметру  $\left[ 1 + \frac{A}{V} \right]^{-1}$  членами. Тогда уравнение состояния принимает вид

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + (1 - \alpha) \left[ \ln \left( \frac{\varepsilon V}{N} \left[ \frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi \hbar^2} \right]^{3/2} \right) + \psi(1) - \psi(2-\alpha) \right] \right\} + \frac{kT}{V} \left\{ \frac{\frac{A}{V}}{1+\frac{A}{V}} - (1 - \alpha) \left[ \ln \left( 1 + \frac{A}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) \right] \right\}$$

Для дальнейшего удобно исходить из выражения

$$A(T) = N B(T),$$

где  $B(T) = \left( \sum_{i=1}^3 x_i B_i + \sum_{i<j=1}^3 x_{ij} B_{ij} \right)$  – обобщенный второй вириальный коэффициент.

В результате уравнение окончательно принимает вид

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + \frac{\frac{B(T)}{V}}{1+\frac{B(T)}{V}} + (1 - \alpha) \left[ \ln \left( \frac{\varepsilon V}{N} \left[ \frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi \hbar^2} \right]^{3/2} \right) + \psi(1) - \psi(2-\alpha) - \frac{1}{N} \left( \ln \left( 1 + \frac{A}{V} \right) - \psi(2-\alpha) - \psi(1) \right) \right] \right\}$$

В полученном выражении оставим члены, линейные по малому параметру  $\frac{B(T)}{v} < 1$ ,

и, пренебрегая малыми членами  $\sim \frac{1}{N}$ , окончательно получим следующее уравнение состояния

$$P = \frac{NkT}{v} \left\{ 1 + \frac{B(T)}{v} (1 - \alpha) \left[ \ln \left( \frac{eV}{N} \left[ \frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi \hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right) + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) - \frac{B(T)}{v} \right] \right\}$$