

Шабанова Муминат Руслановна

**ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ДРОБНОМ ИСЧИСЛЕНИИ:
ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕСТАЦИОНАРНЫМ МЕТОДАМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕЩЕСТВ
И К ЗАДАЧЕ СТЕФАНА**

Специальность 01.04.14 – Теплофизика и теоретическая теплотехника

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Махачкала 2011

Работа выполнена в учреждении Российской академии наук
«Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Назаралиев Магомед–Шафи Ахмедович.

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Вавилов Владимир Платонович

доктор технических наук, профессор
Алишаев Мухтар Гусейнович

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Самарский государственный
технический университет»

Защита состоится 19 октября 2011 г. в 15 часов на заседании
объединенного диссертационного совета ДМ 002.071.01 при учреждении
Российской академии наук «Институт проблем геотермии Дагестанского
научного центра РАН» по адресу: 367030, г. Махачкала, пр. И.Шамякина, д.39а,
актовый зал

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке УРАН «ИПГ ДНЦ».

Автореферат разослан «__9__» сентября 2011 г.

Ученый секретарь объединенного
диссертационного совета
ДМ 002.071.01 д.т.н.

Базаев А.Р.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Современные технологии создали вещества с нано – и фрактальной структурой с принципиально новыми свойствами, нашедшие широкое применение в энергетических системах, строительстве, медицине и, в целом, народном хозяйстве. Теплофизические характеристики таких веществ имеют определяющее значение при их использовании на практике. Все более востребованными становятся нестационарные методы измерения и контроля теплофизических характеристик веществ. Обработка результатов нестационарных методов измерения теплофизических параметров требует развития фундаментальных аспектов теории теплопроводности с учетом сложной природы явлений тепломассопереноса в гетерофазных системах. Одним из фундаментальных аспектов исследования явлений тепломассопереноса в сложных системах является учет нелокальных эффектов таких, как нелокальность по времени (эффект памяти) и нелокальность по координате (эффект пространственных корреляций).

Фундаментальной физической причиной необходимости учета нелокальных эффектов в сложных системах является медленная релаксация корреляционных связей, когда многочастичные функции распределения не распадаются на произведения одночастичных функций распределения. В результате нарушаются условия выполнения принципа локального равновесия, традиционные методы «сокращенного» описания в статистической физике становятся непригодными, поэтому необходимо исходить из принципа локального неравновесия. Исследование неравновесных процессов в условиях принципа локального неравновесия приводит к необходимости учета эффектов памяти (нелокальность по времени) и пространственных корреляций (нелокальность по координате) и развития принципиально новых методов анализа, основанных на применении математического аппарата интегродифференцирования дробного порядка – дробного исчисления.

Отметим, что учет нелокальных эффектов в рамках традиционного подхода приводит к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, ядро которого несет информацию о природе нелокальности. Для решения таких уравнений интегральные операторы представляются в виде ряда дифференциальных операторов с возрастающим показателем порядка дифференцирования и при наличии малого параметра ограничиваются несколькими членами ряда. В отсутствие малого параметра такой подход оказывается непродуктивным и полученные уравнения не всегда удается решать.

Операция дифференцирования дробного порядка, представляя определенное сочетание операций дифференцирования и интегрирования, открывает новый подход к теории нелокальных дифференциальных уравнений. Дробное исчисление, внося в теорию дополнительные параметры в виде показателей производных дробного порядка, дает возможность использования широкого класса функций и открывает, тем самым, принципиально новые возможности интерпретации экспериментальных данных и создания адекватных

количественных моделей процессов нелокального переноса. В этой связи развитие математического аппарата интегродифференцирования дробного порядка как фундаментальной основы исследования нелокальных процессов переноса и его приложений для определения теплофизических параметров по результатам нестационарных методов измерения пространственно – временного распределения температуры становится актуальным направлением современного естествознания.

Цель работы заключается в разработке нелокальных уравнений переноса тепла на основе математического аппарата интегродифференцирования дробного порядка и развитии прикладных аспектов применительно к нестационарным методам определения температуропроводности, а также обобщении задачи Стефана.

Задачи исследований:

- получить фундаментальные решения нелокальных уравнений теплопроводности на основе математического аппарата дробного исчисления;
- исследовать влияние нелокальности по времени и координате на распределение температуры при рассмотрении диффузионного и конвективного механизмов переноса тепла;
- разработать метод определения температуропроводности и параметров нелокальности по времени и координате на основе решения нелокального уравнения теплопроводности и экспериментальных данных нестационарных методов определения распределения температуры;
- разработать математическую модель нелокального переноса тепла на основе дробного исчисления для задачи без начальных условий и его приложения к определению температурных волн в полуограниченных средах;
- на основе математического аппарата дробного исчисления разработать математическую модель задачи Стефана и приложить ее к системе вода – лед.

Объект исследований: процессы переноса тепла в сложных гетерофазных средах, в том числе и с фрактальной структурой, с учетом нелокальных свойств по времени и координате.

Предмет исследований. Модели и режимы теплопереноса на основе нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка. Теплофизические характеристики веществ и динамика изменения координаты межфазной границы в системе вода-лед

Методы исследования базируются на общих принципах неравновесной термодинамики, на математическом аппарате интегродифференцирования дробного порядка.

Основные научные положения, защищаемые автором.

1. Полученные на основе решения нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка по времени и координате для неограниченной прямой трехпараметрическое семейство решений и закономерности влияния параметров нелокальности.

2. Новое двухпараметрическое семейство решений нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка по времени и координате для полупрямой и асимптотическое поведение этих решений.
3. Метод определения температуропроводности и параметров нелокальности по экспериментальным данным нестационарных методов определения распределения температуры по координате и времени и решениям нелокального уравнения теплопроводности для полупрямой.
4. Математическая модель задачи Стефана на основе нелокального уравнения теплопроводности. Новый закон зависимости координаты межфазной границы от времени и от показателей производных дробного порядка по времени и координате.

Научная новизна работы.

1. Разработаны математические модели диффузионного и конвективного переноса тепла на основе нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка по времени и координате и изучены особенности переноса тепла для случаев неограниченной и полуограниченной прямых.
2. Получены фундаментальные закономерности распределения температуры в зависимости от показателей производных дробного порядка по времени и координате.
3. Разработан метод определения температуропроводности и параметров нелокальности по времени и координате на основе решений нелокального уравнения теплопроводности и экспериментальных данных нестационарного метода определения теплофизических характеристик веществ.
4. На основе уравнения теплопроводности в производных дробного порядка по времени разработана математическая модель нелокального переноса тепла для задачи без начальных условий.
5. Установлена зависимость характерных значений глубины проникновения и времени запаздывания температурных волн в поверхностных слоях земли от параметра нелокальности по времени.
6. Предложена обобщенная модель задачи Стефана на основе нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка и на ее основе получена новая зависимость координаты межфазной границы от времени и параметров нелокальности по времени и координате.
7. Обнаружена область аномальной зависимости координаты межфазной границы от параметров нелокальности по времени и координате.

Достоверность и обоснованность научных положений и выводов обеспечивается использованием принципов неравновесной термодинамики при обосновании нелокального уравнения теплопроводности, строгих результатов математического аппарата интегродифференцирования дробного порядка, сравнения с результатами других авторов.

Реализация результатов работы.

Развитая в работе теория нелокальной теплопроводности в дробном исчислении и его приложения к нестационарным методам измерения теплофизических характеристик веществ могут быть использованы в академических и отраслевых

институтах, работающих по соответствующей тематике. Предложенный в работе метод расчета температуропроводности принят ОАО «Геотермнефтегаз» (г. Махачкала) для обработки каротажных данных скважин. По материалам диссертационной работы читается спец. курс «Концепция фрактала и компьютерное моделирование», выполняются дипломные работы на математическом факультете Дагестанского государственного университета.

Личный вклад автора. Во всех работах, опубликованных в соавторстве, все математические выводы, доказательства и численные расчеты получены лично автором.

Апробация работы. Основные положения и выводы диссертации были обсуждены на научных семинарах УРАН «ИПГ ДНЦ» и были предметом обсуждения на следующих научных мероприятиях:

1. XIV международная конференция по химической термодинамике. С.-Петербург, 2002.
2. Международная конференция «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы». Махачкала, 2005.
3. Школа молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов». Махачкала, 2006.
4. Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус, 2007.
5. Российская заочная конференция «Современные наукоемкие технологии». Москва, 2007.
6. Школа молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов». Махачкала, 2008.
7. Международный Российско-Абхазский симпозиум. «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус, 2009.
8. Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара, 2010.
9. Международный Российско-Болгарский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик, 2010.
10. II Международная конференция «Возобновляемая энергетика: Проблемы и перспективы». Махачкала, 2010.
11. I Всероссийская конференция молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». Кабардино-Балкарская республика, пос. Терскол, 2010.
12. II Международный Российско-Казахский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Кабардино-Балкарская республика, Нальчик, 2011.

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 23 работах, из которых 6 – статьи в научных рецензируемых журналах из перечня ВАК

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 129 наименований. Объем работы 120 стр. в том числе 30 рисунков и 2 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследований, основные научные результаты, выносимые на защиту, кратко изложено содержание работы.

Первая глава посвящена изложению современного состояния математической теории теплопроводности. В основе анализа лежит классификация уравнений теплопроводности с позиций принципов неравновесной термодинамики – принципов локального равновесия и локального неравновесия. Кратко изложены существующие подходы в теории теплопроводности. Отмечается, что традиционный подход учета нелокальных свойств с помощью интегрального оператора имеет принципиальные трудности при практическом применении. Новым этапом развития математических основ теории теплопроводности стала теория нелокальных уравнений теплопроводности на основе математического аппарата интегродифференцирования дробного порядка – дробного исчисления [Oldham Keith B., Spanier Jerome. 1974; Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987; Нахушев А.М. 2003; Псху А.В. 2005; Потапов А.А. 2005; Нахушева В.А. 2006; Сербина Л.И. 2007; Учайкин В.В. 2008; Бабенко Ю.И. 2009].

Излагается современное состояние уравнений теплопроводности в производных дробного порядка по времени и координате [Mainardi F., Luchko Y., Pagnini G. 2001; Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. 2006; Podlubny I. 1999; Povstenko Y.Z. 2005, Hristov J. 2005] и отмечены нерешенные задачи.

Дается анализ современного состояния нестационарных методов определения температуропроводности [Parker W.J., Jenkins R.J., Butler C.P., Abbot. 1961; Л.П. Филиппов. 1984; Вавилов В.П. 1991; Фокин В.М., Чернышов В.Н. 2004].

Вторая глава посвящена разработке математической модели переноса тепла на основе уравнения теплопроводности в производных дробного порядка. Рассматривается уравнение с учетом диффузионного и конвективного и переноса

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} - D \frac{\partial^\beta}{\partial \xi^\beta} T(\xi, \tau) + V \frac{\partial^\gamma}{\partial \xi^\gamma} T(\xi, \tau) = 0. \quad (1)$$

Здесь дробная производная по времени (производная Капуто) задается выражением:

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau T(\xi, z) (\tau-z)^{\alpha-1} dz - \frac{T(\xi, 0)}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha},$$

а дробные производные по координате (производная Рисса) определены выражениями:

$$\frac{\partial^\gamma T(\xi, \tau)}{\partial \xi^\gamma} = \frac{1}{2\Gamma(1-\gamma)\cos(\pi(1-\gamma)/2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi', \tau)}{|\xi - \xi'|^\gamma} d\xi',$$

$$\frac{\partial^\beta T(\xi, \tau)}{\partial \xi^\beta} = \frac{1}{2\Gamma(2-\beta)\cos(\pi(2-\beta)/2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi', \tau)}{|\xi - \xi'|^{\beta-1}} d\xi' .$$

Здесь $|\xi| < \infty, \tau > 0, T(\xi, \tau)$ – температура, $D = at_0/x_0^2$ – безразмерный коэффициент температуропроводности, $a = \lambda / c_p \rho$ – коэффициент температуропроводности, λ – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная изобарная теплоемкость, ρ – плотность вещества, $V = vx_0/t_0$ – безразмерная скорость, v – скорость конвективного потока среды, $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 2, 0 < \gamma \leq 1, \tau = t/t_0, \xi = x/x_0$ – безразмерные время и координата; t_0, x_0 – характерные время и масштаб. При рассмотрении задачи Коши для неограниченной прямой получено решение

$$T(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp(-ik(\xi - \xi')) \mathcal{I}(\xi', 0) E_{\alpha,1} \left(-(D|k|^\beta - iV|k|^\gamma \text{sign}k)\tau^\alpha \right), \quad (2)$$

где $E_{\alpha,1}(-\zeta x^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta^n x^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha n + 1)}$ – функция Миттаг-Леффлера,

$T(\xi, 0)$ – начальное условие для температуры. Решение (2) в частном случае $V = 0$ совпадает с решением работы [Mainardi F., Luchko Y., Pagnini G. 2001]. Дается анализ полученного решения. Выяснено влияние учета нелокальности по времени и координате на распределение температуры, как при отсутствии, так и при наличии конвекции. Установлено, что характер распределения температуры в начальные моменты времени при учете нелокальности по времени определяется некоторым характерным временем.

На асимптотическое поведение распределения температуры влияет учет нелокальности по координате. Рассмотрены различные случаи начального распределения температуры. В случае дельта-источника, когда $T(\xi, 0) = T_0 \delta(\xi)$ из (2) получаем

$$T(\xi, \tau) = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^\infty dk \left\{ \exp(-ik\xi) E_{\alpha,1} \left(-(Dk^\beta - iVk^\gamma)\tau^\alpha \right) + \exp(ik\xi) E_{\alpha,1} \left(-(Dk^\beta + iVk^\gamma)\tau^\alpha \right) \right\} \quad (3)$$

В частном случае, полагая в (3) $\alpha = 1$, имеем

$$T(\xi, \tau) = \frac{T_0}{\pi} \int_0^\infty dk \cos(k\xi - Vk^\gamma \tau) \exp(-Dk^\beta \tau) \quad (4)$$

Далее, полагая $\beta=2$ и $\gamma=1$, получим решение

$$T(\xi, \tau) = \frac{T_0}{\sqrt{4\pi D \tau}} \exp\left(-(\xi - V\tau)^2 / 4D\tau\right) . \quad (5)$$

Решение (5) при $V = 0$ совпадает с известным решением [Тихонов А.Н., Самарский А.А. 1972, Фарлоу С. 1985, Лыков А.В. 1967]. Если же в (4) положить $\gamma = 1$ и $\beta \rightarrow 1$ получим новое решение

$$T(\xi, \tau) \rightarrow \frac{T_0}{\pi} \frac{D\tau}{(\xi - V\tau)^2 + (D\tau)^2} \quad (6)$$

Исследовано влияние учета нелокальности по координате и времени на распределение температуры. Далее, на рисунках $\Theta(\xi, \tau) = T(\xi, \tau) / T_0$ - безразмерная температура. Как следует из рисунка 1а влияние нелокальности по времени (пунктирная кривая) и нелокальности по координате (точечная кривая) качественно отличаются. Нелокальность по времени влияет на распределение температуры в начальное время, а нелокальность по пространству влияет на асимптотическое поведение распределения температуры. Исследовано влияние учета нелокальности по времени и координате на распределение температуры с учетом конвективного переноса тепла (рис.1б). Учет нелокальности по времени приводит к смещению максимума распределения температуры в область меньших значений координаты.

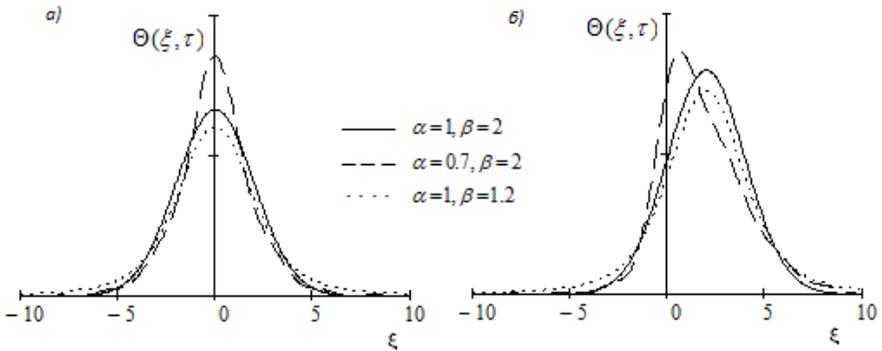


Рис.1. Распределение безразмерной температуры $\Theta(\xi, \tau)$ по координате для различных значений параметров α, β ; $D=1$. а) без конвекции $V=0$; б) с конвекцией $V=1$.

Показано, что существует характерное время $\tau_x = 4 / \pi D$, определяющее характер влияния учета нелокальности на распределение температуры: $T(0, \tau)|_{\beta=2} < T(0, \tau)|_{\beta=1}$ при $\tau < \tau_x$, $T(\tau)|_{\beta=2} > T(\tau)|_{\beta=1}$ при $\tau > \tau_x$. Характер распределения температуры по координате, определяемый решениями (5) и (6) зависит от соотношения τ и τ_x . На рисунке 2а вблизи начала координат при уменьшении значения параметра β величина температуры увеличивается при $\tau < \tau_x$ и уменьшается при $\tau > \tau_x$. Однако распределение температуры вблизи начала координат для случаев $\tau < \tau_x$ и $\tau > \tau_x$ качественно отличается. В области

значений времени $\tau > \tau_x$, как видно на *рисунке 2б*, зависимость распределения температуры вблизи начала координат от учета нелокальности по координате и времени меняется наоборот: при учете нелокальности по координате величина температуры вблизи начала координат уменьшается.

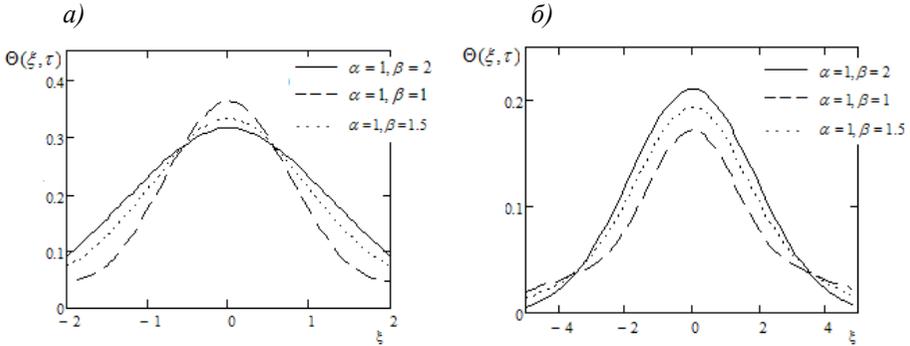


Рис.2. Зависимости безразмерной температуры $\Theta(\xi, \tau)$ от ξ .

а) $\tau = 0.8 < \tau_x$, б) $\tau = 1.8 > \tau_x$

Такой характер зависимости распределения температуры вблизи начала координат от соотношения между τ и τ_x объясняется природой сингулярности функций (5) и (6) при $\xi = 0$, когда $\tau \rightarrow 0$. Для решения (5) $T(0, \tau \rightarrow 0)|_{\beta=2} \approx \tau^{-1/2}$; для решения (6) $T(0, \tau \rightarrow 0)|_{\beta=1} \approx \tau^{-1}$.

В § 2.2 рассмотрена задача для полупространства без учета конвективного члена переноса тепла. Получено общее решение

$$T(\xi, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\xi' \psi(\xi') \sin(k\xi) \sin(k\xi') E_{\alpha,1}(-Dk^\beta \tau^\alpha) + \frac{2D}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\tau} d\tau' \frac{\sin(k\xi)}{k^{1-\beta}} \mu(\tau - \tau') \cdot \tau'^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-Dk^\beta \tau'^\alpha) \quad (7)$$

где $\psi(\xi), \mu(\tau)$ – заданные начальное и граничное условия. Решение (7) в частных случаях совпадает с известными традиционными решениями.

[Тихонов А.Н., Самарский А.А. 1972, Фарлоу С. 1985, Лыков А.В. 1967]

Рассматривая случай $\mu(\tau) = \tilde{T}_0$ и $\alpha = 1, \beta = 2$, получим

$$T(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D\tau}} \int_0^{\infty} d\xi' \left[\exp\left(-\frac{(\xi - \xi')^2}{4D\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi + \xi')^2}{4D\tau}\right) \right] \psi(\xi') + \tilde{T}_0 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{D\tau}}\right) \right),$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz$ - интеграл вероятностей. Если же $\alpha = 1, \beta \rightarrow 1$, то

имеем новое решение:

$$T(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\xi' \left[\frac{D\tau}{(\xi - \xi')^2 + (D\tau)^2} - \frac{D\tau}{(\xi + \xi')^2 + (D\tau)^2} \right] \psi(\xi') + \tilde{T}_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\xi}{D\tau} \right) \right).$$

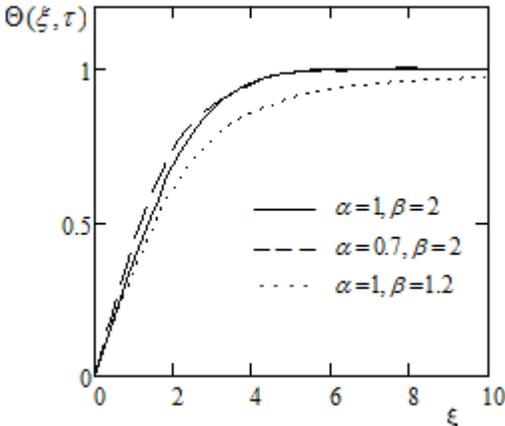
Полагая в (7) $\psi(\xi') = T_0$, $\mu(\tau) = \tilde{T}_0$, получим следующее выражение

$$T(\xi, \tau) = \tilde{T}_0 + \frac{2}{\pi} (T_0 - \tilde{T}_0) \int_0^\infty dk \frac{\sin(k\xi)}{k} E_{\alpha,1}(-Dk^\beta \tau^\alpha), \quad (8)$$

которое при $\alpha = 1, \beta = 2$ совпадает с известным решением

$$T(\xi, \tau) = \tilde{T}_0 + (T_0 - \tilde{T}_0) \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{D\tau}} \right).$$

В остальных случаях ($0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2$) имеем новый класс решений.



Исследовано влияние учета нелокальности по времени и координате на распределение температуры. В частности, на рисунке 3 приведены результаты расчета распределения температуры для полуограниченной прямой. Качественный характер влияния учета нелокальности на зависимость температуры от координаты в случае полуограниченной прямой аналогичен случаю неограниченной прямой: асимптотическое поведение температуры зависит от учета нелокальности по координате.

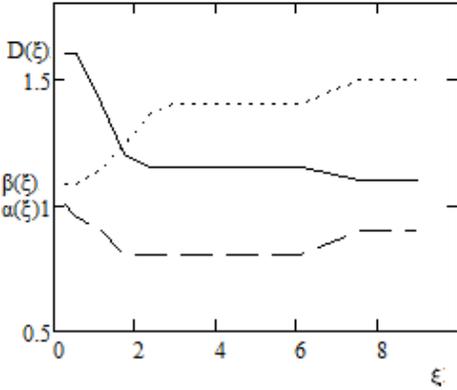
Рис.3 Зависимость безразмерной температуры $\Theta(\xi, \tau)$ от ξ .

В §2.3 анализированы экспериментальные данные по определению распределения температуры для органического стекла, полученные в работе [Власов А.Б. 2004]. Метод расчета заключается в определении значений безразмерной теплопроводности и параметров нелокальности α и β . Для расчета использовалась формула (8). Подставляя заданные значения ξ_i, τ_i и экспериментально определенные значения температуры $T(\xi_i, \tau_i)$ в формулу (8) определяем значения параметров D, α, β . На рис. 4. приведены значения теплопроводности и параметров нелокальности, рассчитанные по экспериментальным данным.

Характерные параметры равны:
 $t_0 = 10^3 \text{ с}$, $\tau = t/t_0$, $x_0 = 10^{-2} \text{ м}$,
 $\xi = x/x_0$. Температуропроводность
 $a = D \cdot a_0$; $a_0 = x_0^2/t_0 = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

Как следует из рисунка 4, значение температуропроводности у торца образца больше чем в объеме, которое оказывается равным $a = 1.12 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. При этом видно, что параметры нелокальности α и β также меняются.

Рис.4. Расчетные значения температуропроводности и параметров нелокальности α , β для



$\tau = 3420 \text{ с}$. Сплошная кривая: зависимость $D(\xi)$; пунктирная - $\alpha(\xi)$, точечная - $\beta(\xi)$. Анализ экспериментальных данных для $\tau = 3660 \text{ с}$ приводит к результатам, аналогичным на рис.4. Предлагаемый метод анализа позволяет получить более подробную информацию о температуропроводности, определяя и неоднородность его распределения вдоль образца. При этом важно, как показывает расчет, что существует локальная область значений параметров α и β , однозначно определяющая значение температуропроводности.

В третьей главе рассмотрена задача без начальных условий. Отмечается, что задача без начальных условий имеет широкое практическое применение. В § 3.1 кратко рассмотрена классическая задача без начальных условий. Причем, в отличие от традиционного изложения, решение классической задачи без начальных условий выведено на основе полученного во второй главе решения (7). Полагая в (7) $\alpha=1$ и $\beta=2$ получим,

$$T(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(\tau - \tau_0)}} \int_0^\infty d\xi' \left[\exp\left(-\frac{(\xi - \xi')^2}{4D(\tau - \tau_0)}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi + \xi')^2}{4D(\tau - \tau_0)}\right) \right] \psi(\xi', \tau) + \frac{2D}{\pi} \int_0^\infty dk \int_{\tau_0}^\tau d\tau' \mu(\tau') k \sin(k\xi) \exp(-Dk^2(\tau - \tau'))$$

Учитывая, что первый интеграл при $t_0 \rightarrow -\infty$ обращается в нуль, а во втором интеграле, используя результат

$$\int_0^\infty k \sin(k\xi) \exp(-Dk^2(\tau - \tau')) dk = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\xi}{(D(\tau - \tau'))^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4D(\tau - \tau')}\right), \quad (9)$$

получаем решение в виде

$$T(\xi, \tau) = \frac{D}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\tau} dt' \frac{\xi}{(D(\tau - \tau'))^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4D(\tau - \tau')}\right) \mu(\tau') .$$

Здесь $\mu(\tau)$ - граничное значение температуры. На практике часто возникают задачи, когда граничное условие задается в виде $\mu(\tau) = T_0 \cos(\Omega\tau)$.

Представляя интеграл (9) в виде

$$T(\xi, \tau) = T_0 \frac{\xi}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^{\infty} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4Dx}\right) \cos(\Omega(\tau - x))$$

и используя результаты

$$\int_0^{\infty} x^{-3/2} \cos(\Omega x) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4Dx}\right) dx = \sqrt{\pi} \frac{2\sqrt{D}}{\xi} \cos(\xi\sqrt{\Omega/2D}) \exp(-\xi\sqrt{\Omega/2D}) ,$$

$$\int_0^{\infty} x^{-3/2} \sin(\Omega x) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4Dx}\right) dx = \sqrt{\pi} \frac{2\sqrt{D}}{\xi} \sin(\xi\sqrt{\Omega/2D}) \exp(-\xi\sqrt{\Omega/2D}) ,$$

получим известное решение задачи о бегущих температурных волнах (задачи без начальных условий) в виде

$$T(\xi, \tau) = T_0 \exp(-\xi\sqrt{\Omega/2D}) \cos(\Omega\tau - \xi\sqrt{\Omega/2D}) .$$

Полученное решение находит широкое применение в различных задачах прикладного характера.

В § 3.2 рассматривается задача без начальных условий на основе нелокального по времени уравнения теплопроводности. В этом случае уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} - D \frac{\partial^2 T(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = 0 ,$$

граничное условие первого типа $T(0, \tau) = \varphi(\tau)$. Производная по времени определена соотношением

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{T(\xi, z)}{(\tau - z)^\alpha} dz .$$

Получено общее решение в виде

$$T(\xi, \tau) = \frac{2D}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cdot k \sin(k\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega\tau) \frac{\varphi_F(\omega)}{D \cdot k^2 + (i\omega)^\alpha} , \quad (10)$$

где $\varphi_F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) \varphi(\tau)$. Рассмотрен случай, когда $\varphi(\tau) = \tilde{T}_0 \cos(\Omega\tau)$,

где Ω - частота изменения температуры. Окончательно (10) принимает вид

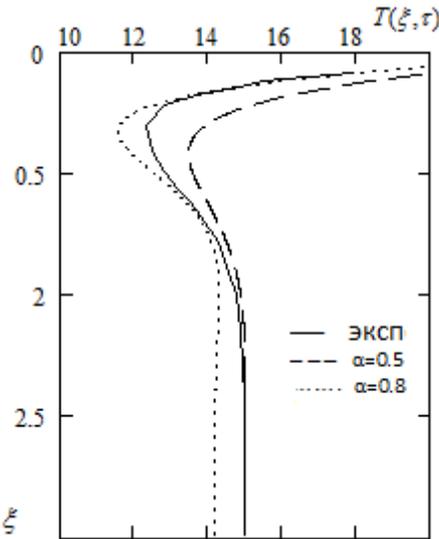
$$T(\xi, \tau) = \tilde{T}_0 \exp\left(-\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D} \cdot \cos(\pi\alpha/4)\right) \cdot \cos\left(\Omega\tau - \xi\sqrt{\Omega^\alpha/D} \cdot \sin(\pi\alpha/4)\right) . \quad (11)$$

При $\alpha=1$ решение (11) переходит в известное решение [Тихонов А.Н., Самарский А.А. 1972]:

$$T(\xi, \tau) = \tilde{T}_0 \exp(-\xi \sqrt{\Omega/2D}) \cdot \cos(\Omega\tau - \xi \sqrt{\Omega/2D}).$$

Как видно из (11), учет эффектов памяти приводит к перенормировке характерного масштаба затухания и времени запаздывания температурных волн. Для характерного масштаба затухания температурных волн имеем $l = x_0 / \sqrt{2} \cdot \cos(\pi\alpha / 4)$, где $x_0 = \sqrt{2a^2 / \omega}$ - характерный масштаб затухания при отсутствии учета эффектов памяти ($\alpha=1$). Для характерного времени запаздывания температурных волн имеем: $\tau_s = \tau_0 \cdot \sqrt{2} \sin(\pi\alpha / 4)$, где $\tau_0 = \sqrt{1/(\omega \cdot a^2)}$ - характерное время запаздывания температурных волн без учета эффектов памяти. Глубина проникновения тепла в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности и параметра нелокальности $T(\xi, \tau) = T_0 \exp(-\xi \sqrt{\Omega/2D}) \cdot \cos(\pi\alpha / 4)$.

При $\alpha < 1$ характерная длина затухания увеличивается, а время запаздывания уменьшается.

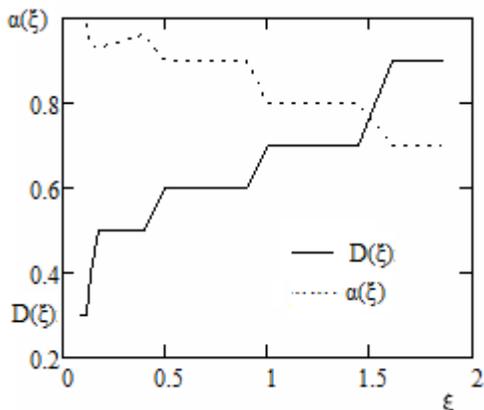


В § 3.3. рассмотрены некоторые прикладные аспекты задачи без начальных условий. Отметим, что, несмотря на накопленный экспериментальный материал и многочисленность теоретических построений, в изучении теплофизических свойств сложных пористых многофазных сред, которыми являются большинство осадочных горных пород, недостаточное внимание уделяется такой важной теплофизической характеристике среды, как ее теплопроводность. На рис. 5 приведены результаты экспериментальных и расчетных данных распределения температуры в верхних слоях Земли.

Рис.5. Экспериментальные и расчетные данные распределения температуры.

Предложенный в § 2.3 метод определения теплопроводности позволяет найти ее на основе данных измерений распределения температуры в поверхностных слоях Земли. Экспериментальная кривая (сплошная кривая) взята из работы [Амирханов Х.И., Суетнов В.В., Левкович Р.А., Гаирбеков Х.А. 1972] и соответствует результатам режимных наблюдений на геотермической станции (г. Избербаш 10.05.1959 г). Пунктирная и точечная кривые соответствуют расчетным кривым по формуле

$$T(\xi, \tau) = T_0 + \tilde{T}_0 \exp\left(-\xi \sqrt{\Omega^\alpha / D} \cdot \cos(\pi\alpha / 4)\right) \cdot \cos\left(\Omega\tau - \xi \sqrt{\Omega^\alpha / D} \cdot \sin(\pi\alpha / 4)\right), \quad (12)$$



где T_0 — среднесуточная

температура поверхности земли. На рисунке 6 приведены результаты расчета температуропроводности как функции координаты по методу, предложенному в §2.3.

Рис. 6 Расчетные значения температуропроводности ($D(\xi)$ - сплошная кривая) и параметра нелокальности по времени ($\alpha(\xi)$ - точечная кривая) по данным режимных наблюдений (Избербаш 10.05.1959).

Из рисунка 6 видно, что значение температуропроводности удовлетворительно согласуется с данными других авторов. Однако, в отличие от традиционного расчета, в данном случае мы рассчитываем зависимость температуропроводности и от координаты. Температуропроводность вычисляется по формуле $a = D \cdot x_0^2 / t_0$. В нашем случае параметр $x_0 = 10$ м, для характерного параметра времени, поскольку рассматриваются годовые колебания, t_0 равен году. Таким образом $a = D \cdot x_0^2 / t_0 = D \cdot 3.17 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. В соответствии с расчетами получается, что температуропроводность меняется в пределах $0.16 \cdot 10^{-7} - 0.3 \cdot 10^{-7} \text{ (м}^2/\text{с)}$, что соответствует результатам других авторов [Новиков С.В. 2009]. Кроме того, температуропроводность в данном случае увеличивается с глубиной. Как видно на рис. 6, с глубиной меняется параметр нелокальности по времени α . Это соответствует тому, что свойства почвы изменяются вглубь.

Четвертая глава посвящена известной задаче Стефана [Stefan J. 1889]. Постоянный и повышенный интерес к задаче Стефана связан с тем, что она удачно сочетает математические и физические проблемы, охватывает широкий круг фундаментальных проблем математики и физики [Данилюк И.И. 1985, Мейерманов А.М. 1986]. С точки зрения математики она представляет продуктивную модель класса нелинейных задач. С точки зрения физики задача Стефана в ее классической постановке позволяет обобщить себя, охватывая особенности подвижной области фазовых переходов. Межфазная область - это особое состояние вещества, занимающее промежуточное положение между сосуществующими фазами, природа, которого до сих пор не понята до конца, особенно в условиях фазового перехода. В настоящее время как математические, так и физические аспекты задачи Стефана интенсивно развиваются.

В § 4.1 Кратко изложены результаты классической задачи Стефана. В прямой задаче Стефана определяется распределение температуры воды, льда и зависимость межфазной границы от времени $\vartheta(\tau)$. Исходная система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial T_1(\xi, \tau)}{\partial \tau} - D_1 \frac{\partial T_1(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, \quad 0 < \xi < \vartheta(\tau), \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_2(\xi, \tau)}{\partial \tau} - D_2 \frac{\partial T_2(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, \quad \vartheta(\tau) < \xi < \infty. \quad (14)$$

С краевыми условиями

$$T_1(0, \tau) = t_1, \quad T_2(\xi, 0) = t_2,$$

$$T_1(\xi, \tau) = T_2(\xi, \tau) = 0 \quad \text{при } \xi = \vartheta(\tau),$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \lambda_2 \frac{\partial T_2(\xi, \tau)}{\partial \xi} = Q \frac{\partial \vartheta(\tau)}{\partial \tau} \quad \text{при } \xi = \vartheta(\tau).$$

В (13,14) $D_{1(2)} = a_{1(2)} t_0 / x_0^2$ – безразмерный коэффициент температуропроводности,

$a_{1(2)} = \lambda_{1(2)} / c_{1(2)} \rho_{1(2)}$ – коэффициент температуропроводности,

$\tau = t / t_0, \xi = x / x_0$ – безразмерные время и координата, t_0, x_0 – характерные время и масштаб, Q – количество тепла, выделяемое или поглощаемое в процессе таяния льда или замерзания воды. Физический смысл условия Стефана

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \lambda_2 \frac{\partial T_2(\xi, \tau)}{\partial \xi} = Q \frac{\partial \vartheta(\tau)}{\partial \tau} \quad \text{заканчивается в равенстве потоков}$$

тепловой энергии с учетом скрытой теплоты выделяемой или поглощаемой на границе между фазами в зависимости от направления движения фазовой границы. Решения задачи имеют вид

$$T_1(\xi, \tau) = t_1 \left[1 - \operatorname{erf}(\xi / 2\sqrt{D_1 \tau}) / \operatorname{erf}(\sigma / 2\sqrt{D_1}) \right] \quad \text{для } 0 < \xi < \vartheta(\tau),$$

$$T_2(\xi, \tau) = t_2 \cdot \operatorname{erf}(\sigma / 2\sqrt{D_2}) / (1 - \operatorname{erf}(\sigma / 2\sqrt{D_2})) \left[\operatorname{erf}(\xi / 2\sqrt{D_2 \tau}) / \operatorname{erf}(\sigma / 2\sqrt{D_2}) - 1 \right] \quad \text{для } \vartheta(\tau) < \xi < \infty.$$

Причем зависимость координаты межфазной границы от времени имеет вид $\vartheta(\tau) = \sigma \tau^{1/2}$, где константа σ определяется уравнением, которое получается из условия Стефана

$$\frac{\lambda_1 t_1}{\sqrt{D_1}} \frac{\exp\left(-\frac{\sigma^2}{4D_1}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{D_1}}\right)} + \frac{\lambda_2 t_2}{\sqrt{D_2}} \frac{\exp\left(-\frac{\sigma^2}{4D_2}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{D_2}}\right)} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} Q \sigma. \quad (15)$$

В § 4.2 задача Стефана обобщена на основе нелокальных уравнений теплопроводности в производных дробного порядка. Уравнения в задаче Стефана в производных дробного порядка имеют вид

$$\frac{\partial^\alpha T_1(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} - D_1 \frac{\partial^\beta T_1(\xi, \tau)}{\partial \xi^\beta} - \frac{T_1(\xi, 0)}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha} = 0, \quad 0 < \xi < \mathcal{G}(\tau),$$

$$\frac{\partial^\alpha T_2(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} - D_2 \frac{\partial^\beta T_2(\xi, \tau)}{\partial \xi^\beta} - \frac{T_2(\xi, 0)}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha} = 0, \quad \mathcal{G}(\tau) < \xi < \infty.$$

Граничные условия:

$$T_1(0, \tau) = t_1, \quad T_2(\xi, 0) = t_2,$$

$$T_1(\xi, \tau) = T_2(\xi, \tau) = t_3 \quad \text{при} \quad \xi = \mathcal{G}(\tau),$$

$$\lambda_1 \frac{\partial^\gamma T_1(\xi, \tau)}{\partial \xi^\gamma} - \lambda_2 \frac{\partial^\gamma T_2(\xi, \tau)}{\partial \xi^\gamma} = Q \frac{\partial^\mu \mathcal{G}(\tau)}{\partial \tau^\mu} \quad \text{при} \quad \xi = \mathcal{G}(\tau), \quad \mathcal{G}(0) = 0, \quad (16)$$

где $\mathcal{G}(\tau)$ - координата подвижной границы раздела фаз. Условие (16) обобщает известное условие Стефана и совпадает с ним, когда $\gamma = 1$ и $\mu = 1$. В остальных случаях мы имеем нетривиальное обобщение условия Стефана. Решения задачи Стефана в производных дробного порядка имеют вид:

$$T_1(\xi, \tau) = t_1 + \frac{t_3 - t_1}{F_{\alpha, \beta}(D_1 / \sigma^\beta)} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sin z}{z} E_{\alpha, 1}(-D_1 \frac{\tau^\alpha}{\xi^\beta} z^\beta), \quad 0 < \xi < \mathcal{G}(\tau),$$

$$T_2(\xi, \tau) = \frac{t_3 - t_2 F_{\alpha, \beta}(D_2 / \sigma^\beta)}{1 - F_{\alpha, \beta}(D_2 / \sigma^\beta)} + \frac{t_2 - t_3}{1 - F_{\alpha, \beta}(D_2 / \sigma^\beta)} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sin(z)}{z} E_{\alpha, 1}(-D_2 \frac{\tau^\alpha}{\xi^\beta} z^\beta), \quad \mathcal{G}(\tau) < \xi < \infty,$$

$$F_{\alpha, \beta}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{\sin(z)}{z} E_{\alpha, 1}(-xz^\beta).$$

Зависимость координаты межфазной границы от времени имеет вид

$$\mathcal{G}(\tau) = \sigma(\alpha, \beta) \cdot \tau^{\alpha/\beta}, \quad (17)$$

где уравнение для определения σ дается выражением

$$\frac{(t_3 - t_1)\lambda_1 K_{\alpha, \beta}(D_1 / \sigma^\beta)}{F_{\alpha, \beta}(D_1 / \sigma^\beta)} - \frac{(t_2 - t_3)\lambda_2 K_{\alpha, \beta}(D_2 / \sigma^\beta)}{(1 - F_{\alpha, \beta}(D_2 / \sigma^\beta))} = - \frac{\Gamma(1 + \alpha/\beta)}{\Gamma(1 - \gamma\alpha/\beta)} Q \sigma^{1+\gamma}.$$

Здесь

$$K_{\alpha, \beta}(x) = \frac{2}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\gamma)\right)} \int_0^\infty \frac{dz}{z^{1-\gamma}} \left(\cos\left(z + \frac{\pi}{2}(1-\gamma)\right) + U_{1-\gamma}(z, 0) \right) E_{\alpha, 1}(-xz^\beta),$$

где $U_\mu(x, y)$ - функция Ломмеля от двух аргументов.

Таким образом, при учете эффектов памяти и пространственных корреляций имеет место обобщенный закон изменения координаты области фазового перехода, определяемый соотношением $\vartheta(\tau) = \sigma(\alpha, \beta) \cdot \tau^{\alpha/\beta}$. Величина σ оказывается зависящей от двух параметров: $\sigma = \sigma(\alpha, \beta)$. При $\alpha=1$ и $\beta=2$ уравнение (17) совпадает с классическим уравнением. В случае $0 < \alpha \leq 1$ и $\beta=2$ уравнение (17) совпадает с уравнением работы [Liu Junyi, Xu Mingyu. 2009].

В §4.3 рассмотрена система вода-лед. Принципиальное отличие закона $\vartheta(\tau) = \sigma(\alpha, \beta) \cdot \tau^{\alpha/\beta}$ от ранее известных заключается в том, что $\vartheta(\tau)$ зависит от двух параметров α и β . Для случая системы вода – лед проведены расчеты и анализирована зависимость координаты межфазной границы при различных α и β . Показано, что в области значений параметров $\alpha=1$ и $\beta=1$ значения координаты межфазной границы аномально растут.

Для определения значения функции $\vartheta(\tau) = \sigma(\alpha, \beta) \cdot \tau^{\alpha/\beta}$ установим, как зависит $\sigma(\alpha, \beta)$ от параметров α, β для случая системы вода-лед. Исходя из значений параметров температура льда $t_1 = -5^0 C$, воды $t_2 = 0^0 C$, $t_3 = 0^0 C$,

$$\rho_{\text{льда}} = 917.4 \text{ кг/м}^3, \lambda_{\text{льда}} = 2.24 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}, Q_{\text{льда}} = 330 \text{ кДж/кг},$$

$$a_{\text{льда}} = 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \text{ уравнение для определения } \sigma(\alpha, \beta) \text{ принимает вид}$$

$$\frac{K_{\alpha, \beta}(1.2/\sigma^\beta)}{F_{\alpha, \beta}(1.2/\sigma^\beta)} = 27.03 \frac{\Gamma(1 + \alpha/\beta)}{\Gamma(1 - \gamma\alpha/\beta)} \sigma^{1+\gamma}$$

Численные значения $\sigma(\alpha, \beta)$ приведены в виде таблицы для нескольких значений α, β . В таблице по строке меняются значения $\alpha \in (0,1)$, по столбцу меняются значения $\beta \in (1,2)$ с шагом 0.05. Исходя из этих значений и определяя $\sigma(\alpha, \beta)$ для фиксированных $\alpha \in (0,1)$ и $\beta \in (1,2)$, можно определить зависимость координаты от α и β . На *рисунке 7а* приведены результаты расчета зависимости $\vartheta(\tau)$ от значений α для некоторых фиксированных значений β . Для значения $\beta=1.8$ эта зависимость имеет монотонно возрастающий характер при уменьшении значения параметра α . Для значения $\beta=1.05$ эта зависимость становится немонотонной и имеет пороговый характер. На *рисунке 7б* приведены результаты расчета зависимости $\vartheta(\tau)$ от значений β для некоторых фиксированных значений α . Как следует из рисунка, характер зависимости $\vartheta(\tau)$ от значений β определяется значением параметра α . Для значения $\alpha=0.7$ эта зависимость имеет монотонно убывающий характер при уменьшении значения параметра β . Для значений $\alpha=1$ эта зависимость становится немонотонной и имеет пороговый характер. Общая зависимость $\vartheta(\tau) = \sigma(\alpha, \beta) \cdot \tau^{\alpha/\beta}$ от параметров α, β приводится на *рисунке 8*. Как видно, вблизи области значений $\alpha=1, \beta=1$ значения функции $\vartheta(\tau) = \sigma(\alpha, \beta) \cdot \tau^{\alpha/\beta}$ аномально растут.

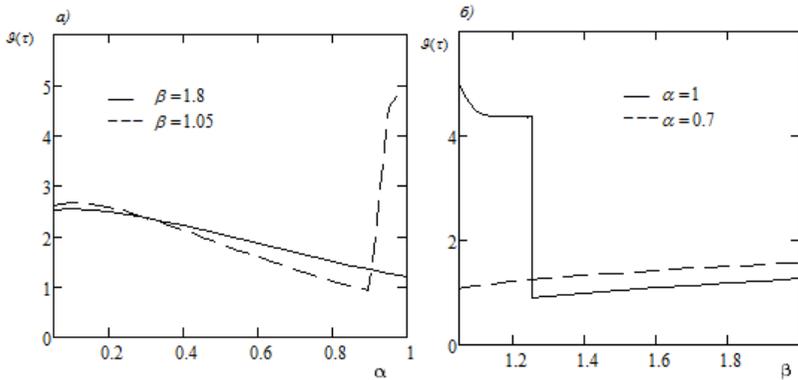


Рис. 7. Зависимости безразмерной координаты межфазной границы: а) от параметра α ; б) от параметра β .

Таблица значений $\sigma(\alpha, \beta)$

2.272	2.277	2.282	2.286	2.29	2.294	2.297	2.3	2.303	2.306	2.309	2.311	2.314	2.316	2.318	2.32	2.322	2.324	2.326	2.327
2.000	2.016	2.03	2.044	2.056	2.068	2.079	2.089	2.098	2.107	2.116	2.124	2.131	2.138	2.145	2.151	2.157	2.163	2.169	2.174
1.719	1.744	1.768	1.789	1.809	1.828	1.846	1.863	1.879	1.893	1.907	1.921	1.933	1.945	1.956	1.967	1.977	1.987	1.997	2.005
1.455	1.487	1.517	1.545	1.572	1.597	1.62	1.642	1.663	1.683	1.702	1.719	1.736	1.752	1.768	1.782	1.796	1.81	1.823	1.835
1.217	1.254	1.289	1.321	1.352	1.381	1.409	1.435	1.46	1.484	1.506	1.528	1.548	1.568	1.586	1.604	1.621	1.638	1.653	1.669
1.009	1.048	1.085	1.121	1.154	1.186	1.217	1.246	1.273	1.3	1.325	1.349	1.372	1.394	1.416	1.436	1.456	1.474	1.493	1.51
0.8303	0.8699	0.9079	0.9442	0.9789	1.012	1.044	1.075	1.104	1.132	1.159	1.185	1.21	1.234	1.257	1.28	1.301	1.322	1.342	1.361
0.6786	0.7174	0.7548	0.7909	0.8257	0.8593	0.8917	0.9229	0.953	0.982	1.01	1.037	1.063	1.088	1.113	1.136	1.159	1.181	1.202	1.222
0.5515	0.5884	0.6243	0.6592	0.6931	0.7261	0.758	0.789	0.8191	0.8482	0.8764	0.9038	0.9303	0.956	0.9809	1.005	1.028	1.051	1.073	1.095
0.4459	0.4802	0.5139	0.547	0.5793	0.611	0.6419	0.672	0.7014	0.73	0.7579	0.7851	0.8115	0.8372	0.8622	0.8866	0.9103	0.9333	0.9558	0.9776
0.3589	0.3902	0.4213	0.4521	0.4824	0.5122	0.5416	0.5704	0.5987	0.6263	0.6534	0.6799	0.7058	0.7311	0.7558	0.78	0.8036	0.8266	0.849	0.871
0.2877	0.3159	0.3441	0.3723	0.4003	0.428	0.4555	0.4827	0.5094	0.5358	0.5617	0.5872	0.6123	0.6368	0.6609	0.6845	0.7077	0.7303	0.7525	0.7743
0.2297	0.2547	0.28	0.3055	0.331	0.3566	0.382	0.4072	0.4323	0.4571	0.4817	0.5059	0.5298	0.5534	0.5766	0.5994	0.6219	0.644	0.6656	0.6869
0.1828	0.2048	0.2272	0.25	0.273	0.2962	0.3194	0.3427	0.3659	0.389	0.412	0.4348	0.4575	0.4798	0.502	0.5238	0.5454	0.5667	0.5877	0.6083
0.1449	0.1641	0.1838	0.204	0.2245	0.2454	0.2665	0.2877	0.309	0.3304	0.3517	0.373	0.3942	0.4152	0.4362	0.4569	0.4775	0.4978	0.5179	0.5378
0.1146	0.1311	0.1482	0.166	0.1842	0.2028	0.2217	0.241	0.2604	0.2799	0.2996	0.3193	0.339	0.3587	0.3783	0.3978	0.4172	0.4365	0.4557	0.4747
0.09037	0.1045	0.1193	0.1347	0.1507	0.1672	0.1841	0.2014	0.2189	0.2367	0.2547	0.2728	0.291	0.3092	0.3275	0.3458	0.364	0.3822	0.4003	0.4184
0.07106	0.08302	0.09573	0.1091	0.1231	0.1376	0.1526	0.168	0.1838	0.1998	0.2161	0.2327	0.2494	0.2662	0.2831	0.3001	0.3171	0.3342	0.3512	0.3682
0.3057	0.3436	0.3838	0.08816	0.1003	0.113	0.1262	0.1399	0.1539	0.1684	0.1831	0.1981	0.2134	0.2288	0.2444	0.2601	0.2759	0.2918	0.3077	0.3236
0.289	0.293	0.3234	0.3395	0.08156	0.0926	0.1042	0.1162	0.1287	0.1416	0.1549	0.1684	0.1823	0.1964	0.2106	0.2251	0.2397	0.2544	0.2692	0.2841

Аномальный рост значений функции $\vartheta(\tau) = \sigma(\alpha, \beta) \cdot \tau^{\alpha/\beta}$ наблюдается в области значений параметров $\alpha=1, \beta=1$. Это связано с двумя факторами: во - первых, в этой области зависимость $\vartheta(\tau)$ от времени имеет линейный характер $\vartheta(\tau) \approx \tau$, во-вторых, в данном случае системы вода-лед, значения параметра $\sigma(\alpha, \beta)$ в этой области увеличиваются.

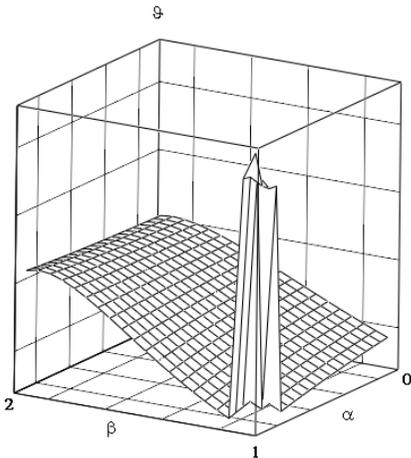


Рис.8 Зависимость безразмерной координаты межфазной границы $\vartheta(\tau) = \sigma(\alpha, \beta) \cdot \tau^{\alpha/\beta}$ от параметров α, β для значения $\tau = 20$.

Таким образом, нелокальные уравнения теплопроводности, благодаря наличию двух новых параметров α и β , которые являются показателями производных дробного порядка по времени и координате, значительно расширяют область применимости задачи Стефана, позволяя тем самым создать адекватные количественные модели процессов переноса тепла с учетом фазовых

переходов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена развитию нелокальной теории теплопроводности на базе дробного исчисления и ее приложениям к нестационарным методам определения теплофизических характеристик среды и задаче Стефана.

Основные теоретические положения и практические результаты работы следующие:

1. Построена математическая модель нелокального переноса тепла для случаев неограниченной и полуограниченной сред на основе уравнения теплопроводности в производных дробного порядка по времени и координате.
2. Получено трехпараметрическое семейство решений нелокального уравнения теплопроводности для неограниченной прямой с учетом диффузионного и конвективного механизмов переноса тепла.
3. Установлено, что учет нелокальности по времени и по пространству по разному влияют на распределение температуры вблизи источника тепла. На асимптотическое поведение распределения температуры влияет учет нелокальности по координате.
4. Построена модель переноса тепла для полупространства с учетом нелокальности по пространству и координатам.
5. Разработан метод определения температуропроводности и параметров нелокальности по времени и координате на основе решений нелокального уравнения теплопроводности.
6. Получено решение задачи о бегущих температурных волнах (задача без начальных условий). Исследована зависимость температуропроводности и параметра нелокальности от глубины на основе данных по измерению распределения температуры в верхних слоях земли.
7. Построена математическая модель задачи Стефана на основе нелокального уравнения теплопроводности. Получен новый закон движения границы фаз от времени и от показателей производных дробного порядка по времени и координате. Для системы вода-лед установлено существование области значений

параметров нелокальности по времени, где значения координаты межфазной границы становятся аномально большими.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

1. Мейланов Р.П., Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р. Уравнение параболического типа с дифференцированием дробного порядка // Вестник Дагестанского научного центра РАН. – 2006. – С. 11–15. **(из перечня ВАК)**
2. Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р. Численный метод решения начально-граничной задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. ФМН. – 2010. №5(21). – С. 244 – 251. **(из перечня ВАК)**
3. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Задача Стефана в дробном исчислении // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук. – 2010. Т.12. №1. С. 53 – 56. **(из перечня ВАК).**
4. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Задача Стефана // Нелинейный мир. – 2011. Т.9. №7. – С. 477 – 481. **(из перечня ВАК).**
5. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Особенности решений уравнения теплопроводности в производных дробного порядка // Журнал технической физики. – 2011. Т.81, № 7. – С. 1– 6. **(из перечня ВАК).**
6. Алхасов А.Б., Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Уравнение теплопроводности в производных дробного порядка // Инженерно-физический журнал. – 2011. Т.84. №2. – С. 309–317. **(из перечня ВАК).**
7. Мейланов Р.П., Рамазанова А.Э., Шабанова М.Р. Равновесная термодинамика систем с фрактальной структурой // Тезисы докладов XIV международная конференция по химической термодинамике. – С.-Петербург 2002. – С. 232 – 233.
8. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р., Янполов М.С. Обобщенное уравнение Фоккера-Планка в задачах тепломассопереноса // Материалы международной конференции «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы». – Махачкала. – 2005.– С. 278 – 282.
9. Шабанова М.Р. Обобщенное уравнение теплопроводности в задачах теплопереноса // Материалы Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» Махачкала. – 2006. – С. 244–249.
10. Мейланов Р.П., Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р. Обобщенная задача диффузии на полупрямой // Современные наукоемкие технологии. – 2007. – №8. – С. 82–84.
11. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Уравнение теплопроводности для сред с фрактальной структурой // Современные наукоемкие технологии. – 2007. – №8. – С. 84 – 85.
12. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Особенности теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Материалы Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». – Нальчик-Эльбрус. – 2007. – С. 104–109.
13. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Уравнение теплопроводности в производных дробного порядка и приложение к задачам геотермии // Сборник научных трудов

«Тепловое поле Земли и методы его изучения» – Москва РГГУ. – 2008. – С. 145 – 150.

14. Шабанова М.Р. Инвариантные свойства уравнения теплопроводности с производными дробного порядка // Материалы Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов». Махачкала. – 2008. – С. 219 – 221.

15. Мейланов Р.П., Магомедов Р.М., Шабанова М.Р., Ахмедова Г.М. Задача без начальных условий для нелокального уравнения теплопроводности // Материалы Международного Российско-Абхазский симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик-Эльбрус. – 2009. – С. 162 – 165.

16. Назаралиев. М.А., Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р. Особенности фазовой траектории фрактального «брюсселятора» // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара. – 2010. – С. 204 – 210.

17. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Задача Стефана в дробном исчислении // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара. – 2010. – С. 192–197.

18. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Задача Стефана в средах с фрактальной структурой // Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик. – 2010. – С. 163 –165.

19. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Особенности решений уравнения теплопереноса в производных дробного порядка // Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик.– 2010. – С. 166–169.

20. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р., Ахмедова Г.М. Задача Стефана на основе нелокального уравнения теплопроводности // Материалы II Международной конференции «Возобновляемая энергетика: Проблемы и перспективы». – Махачкала. – 2010. – С. 160–164.

21. Бейбалаев В.Д., Мейланов Р.П., Назаралиев М-Ш.А., Шабанова М.Р. Численное решение нелокального уравнения теплопроводности // Материалы II Международной конференция «Возобновляемая энергетика: Проблемы и перспективы». – Махачкала. – 2010. – С. 221–225.

22. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Об определении производной Рисса // Материалы I Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». – Кабардино-Балкарская республика пос. Терскол. – 2010. – С.125 –129.

23. Шабанова М.Р. Аномальные решения нелокальной задачи Стефана // Материалы II Международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик. – 2011. – С. 215 – 218.

Подписано в печать 02.09.2011г.
Формат 60x84_{1/16}. Печать ризографная. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Усл. п. л. 1. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии АЛЕФ, ИП Овчинников М.А.
Тел.: +7-928-264-88-64, +7-903-477-55-64, +7-988-2000-164

